

CNRS
AO 5260

ARTICLE PRINCIPAL

Recouvrant en partie

LA THESE DE DOCTORAT
ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

par

Armando MACHADO

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES

Sujet de la Thèse : *Quasi-topologie algébrique*

soutenue le 18 / 12 / 1970 devant la Commission d'Examen :

Président Charles EHRESMANN

Examineurs Michel ZISMAN

François NORGUET

Rapporteur Andrée BASTIANI



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551515_0040

ARTICLE PRINCIPAL

Recouvrant en partie

LA THESE DE DOCTORAT
ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

par

Armando MACHADO

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES

Sujet de la Thèse : *Quasi-topologie algébrique*

soutenue le 18/ 12/ 1970 devant la Commission d'Examen :

Président Charles EHRESMANN

Examineurs Michel ZISMAN

François NORGUET

Rapporteur Andrée BASTIANI



INTRODUCTION

Les espaces quasi-topologiques ont été introduits par KOWALSKY sous le nom de "Limesraum" ({1}) et leur théorie a été développée par FISCHER ({2}) et BASTIANI ({3}) (à qui on emprunte la terminologie française) et a été employée dans différentes branches de la Mathématique, comme l'Analyse Fonctionnelle (COOK et FISCHER, {4} et {5} , BINZ et KELLER, {6} , et BINZ, {7}), la Géométrie Différentielle (BASTIANI, {3} , et EHRESMANN, {8}) et la théorie de la différentiation de fonctions entre espaces vectoriels topologiques non normables (BASTIANI, {3} , BINZ, {9} et FROLICHER et BUCHER, {10}).

Le concept d'espace quasi-topologique généralise celui d'espace topologique et présente en gros deux avantages principaux:

1) Si E et E' sont des espaces topologiques, il n'existe pas en général sur l'ensemble $E' \cdot T \cdot E$ des applications continues de E dans E' une topologie canonique (dans un certain sens - voir par exemple ARENS, {11}). Par contre il existe une quasi-topologie canonique sur l'ensemble $E' \cdot Q \cdot E$ des applications continues de E dans E' (E et E' espaces quasi-topologiques) ; c'est la quasi-topologie de la convergence locale ({3}). Le sens du mot canonique a été explicité (et mis dans un cadre plus général) par ANTOINE dans {12} .

2) Un certain nombre de propriétés de compatibilité sont valables dans le cadre des quasi-topologies et ne le sont pas, sauf restrictions, dans le cadre des topologies (normalement les propriétés qui font intervenir les structures finales). On cite, par exemple, les propositions I 2.8 , I 3.3 , I 4.9 , I 11.2 et II 4.7 .

1) et 2) sont assez utiles pour clarifier un certain nombre de notions dans la Topologie Algébrique, en particulier en ce qui concerne l'homotopie et la compatibilité d'un certain nombre de foncteurs avec les sommes.

D'autres tentatives ont été faites pour avoir les avantages 1) et 2) , soit en prenant une sous-catégorie pleine de la catégorie des espaces topologiques (GABRIEL-ZISMAN dans {29} et STEENROD dans {24}), ce qui entraîne une modification des produits et des sous-structures, soit avec une définition différente de quasi-topologie (SPANIER dans {25} et EILENBERG dans {17}). Cette dernière voie a l'inconvénient d'identifier des topologies

(deux topologies pouvant avoir la même quasi-topologie associée) et d'avoir une définition présentant des difficultés logiques et entraînant, en particulier, l'existence d'un trop grand nombre de structures sur un même ensemble. Elle nécessite aussi comme préalable la notion d'espace topologique.

Le travail est divisé en deux chapitres, un premier sur la Quasi-topologie Générale et un deuxième sur la Quasi-topologie Algébrique. Chaque chapitre est divisé en paragraphes et une référence telle que I 3.6 , indique le chapitre I , paragraphe 3 et définition, proposition, etc... 6 , le numéro du chapitre n'apparaissant pas si la référence est faite dans le même chapitre. Les numéros entre accolades renvoient à la bibliographie.

Le premier chapitre débute par un rappel de définitions et propositions publiées par les auteurs cités et qui sont nécessaires pour un exposé cohérent de la théorie. D'une manière générale, on ne présente pas les démonstrations des propositions déjà démontrées ailleurs. Les paragraphes 1 et 2 sont consacrés aux premières définitions et propriétés ainsi qu'aux quasi-topologies initiales et finales et sont empruntés à FISCHER, {2} . Dans le paragraphe 3 est présentée la notion de quasi-topologie de la convergence locale (BASTIANI, {3}). Dans le paragraphe 4 on étudie les quasi-topologies séparées, qui sont définies dans {4} ainsi que les quasi-topologies compactes, objet du paragraphe 5 . Dans le paragraphe 6 on définit les applications quasi-ouvertes, qui généralisent les applications ouvertes entre espaces topologiques. Dans le paragraphe 7 on considère les familles localement finies d'ensembles et on regarde sous **quelles** conditions la quasi-topologie d'un espace est la quasi-topologie finale définie par les inclusions d'une certaine famille de sous-espaces. Le paragraphe 8 est consacré au recollement d'espaces quasi-topologiques, qui forment ainsi une espèce de structures locales complète au-dessus des topologies (cf. {3} , BASTIANI), et on applique ce concept à l'étude des sommes d'espaces quasi-topologiques. Dans les paragraphes 9 et 10 on adapte aux espaces quasi-topologiques la théorie des espaces topologiques connexes, localement connexes, connexes par arcs et localement connexes par arcs. Bien que, dans la plupart des cas, les démonstrations des propositions

soient pareilles à celles qu'on rencontre pour les espaces topologiques connexes, par exemple dans BOURBAKI ({13}), elles ne résultent pas, comme on pourrait parfois l'imaginer, de l'application de celles-ci aux topologies associées. Enfin, dans le paragraphe 11 on examine, dans le cas quasi-topologique, le concept de collage d'espaces, en utilisant le schéma utilisé par BROWN dans {14} ("Adjunction Spaces"). Ce concept est très utilisé en Topologie Algébrique, par exemple dans la définition des CW-complexes, du cylindre et du cône d'une application continue et dans l'opération de contraction en un point d'un certain sous-ensemble.

Dans le deuxième chapitre on applique les méthodes de la Topologie Algébrique aux espaces quasi-topologiques. Dans le paragraphe 1 on présente la définition de catégorie p_{QT} -dominée ({15} , EHRESMANN), concept un peu plus faible que celui de Q -catégorie (EILENBERG, {17}), et on étudie dans ce cadre la notion d'homotopie et les notions de fibration et de cofibration, ce qui permet d'appliquer les méthodes de dualité. La catégorie QT des espaces quasi-topologiques est canoniquement une catégorie p_{QT} -dominée et dans les paragraphes 2 et 3 on étudie dans ce cas particulier les cofibrations et les fibrations. En ce qui concerne les cofibrations on généralise les propriétés qu'on trouve par exemple dans SPANIER ({16}) ou BROWN ({14}). Pour les fibrations, on adapte au cas quasi-topologique la démonstration du théorème d'Hurewicz qu'on trouve dans SPANIER ({16}). Dans le paragraphe 4, on étudie le produit tensoriel d'espaces quasi-topologiques pointés (cf. EILENBERG, {17}), on définit les sphères modifiées S_n , qui serviront dans la théorie des groupes d'homotopie et on présente comme exemples les foncteurs "suspension" et "cône réduit". Dans le paragraphe 5, on définit les groupes d'homotopie (absolus et relatifs). Dans le paragraphe 6 on établit quelques lemmes relatifs aux espaces topologiques $[0,1]^n$ qui sont nécessaires dans les paragraphes suivants, ces lemmes étant couramment employés dans les travaux de Topologie Algébrique mais normalement leur démonstration étant omise. Dans le paragraphe 7, on établit les suites exactes d'homotopie d'une fibration et d'une paire quasi-topologique pointée par un procédé qui reprend, avec quelque modifications, la méthode exposée dans {20}, et on introduit

la notion de suite fortement exacte qui est importante quand on travaille au niveau des ensembles pointés ($\pi_0(\hat{X})$ et $\pi_1(\hat{X}, \hat{A})$). On applique le procédé de SPANIER ({16}) pour établir la suite exacte d'homotopie d'un triplet quasi-topologique. Dans le paragraphe 8, on expose la théorie de l'homologie cubique des espaces quasi-topologiques, ayant préféré cette théorie à celle de l'homologie classique parce qu'elle est géométriquement d'un maniement plus facile. On définit dans cette théorie l'opérateur division barycentrique ce qui permet de traiter les problèmes d'excision. On démontre le théorème d'Eilenberg-Zilber, concernant l'homologie d'un produit d'espaces quasi-topologiques, théorème qui prend une forme légèrement différente de celle qu'on présente dans la théorie simpliciale classique. Dans le paragraphe 9, on commence par déterminer les groupes d'homologie des sphères modifiées S_n , on définit alors les homomorphismes d'Hurewicz h_n entre les groupes d'homotopie et les groupes d'homologie et on démontre le théorème de Hurewicz concernant cet homomorphisme. Enfin un court appendice indique comment certains résultats de ce travail pourraient également être obtenus par application des méthodes simpliciales.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Monsieur Ehresmann et Madame Bastiani pour l'attention bienveillante qu'ils m'ont manifestée ainsi que pour les encouragements qu'ils m'ont prodigués lors de l'élaboration de ce travail, à Monsieur Zisman qui a bien voulu le lire et émettre critiques et suggestions à son sujet.

Je remercie l'Instituto de Alta Cultura (Lisbonne) pour la bourse qu'il m'a attribuée, rendant ainsi possible la réalisation de ce travail.

TABLE DES MATIERES

	Pages
<i>Chapitre I . Quasi-topologie Générale.</i>	
1. Définitions et propriétés générales.....	6
2. Les quasi-topologies initiales et finales.....	8
3. La quasi-topologie de la convergence locale.....	11
4. Espaces quasi-topologiques séparés.....	13
5. Espaces quasi-topologiques compacts.....	16
6. Applications quasi-ouvertes.....	20
7. Familles localement finies et familles finalisantes.	24
8. Le recollement de quasi-topologies.....	26
9. Espaces quasi-topologiques connexes et localement con- nexes.....	29
10. Espaces connexes par arcs et localement connexes par arcs.....	35
11. Le collage d'espaces quasi-topologiques.....	39
<i>Chapitre II . Quasi-topologie Algébrique.</i>	
1. Les catégories p_{QT} -dominées. Homotopie, fibrations et cofibrations.....	46
2. La catégorie p_{QT} -dominée QT . Les cofibrations dans QT	52
3. Les fibrations dans QT	57
4. Produits tensoriels. Foncteurs "Suspension" et "Cône réduit"	68
5. Les groupes d'homotopie.....	80
6. Quelques lemmes sur les espaces I^n	88
7. Suites exactes d'homotopie d'une fibration et d'une paire.....	92
8. Homologie singulière cubique des espaces quasi-topo- logiques.....	111
9. Homomorphisme d'Hurewicz. Théorème d'Hurewicz.....	132
10. Les quasi-CW-complexes.....	160
Index.....	166
Index des Notations.....	167
Appendice.....	170
Bibliographie.....	175

CHAPITRE I

QUASI-TOPOLOGIE GENERALE

1. Définitions et propriétés générales

Rappelons que, étant donné un ensemble E , on appelle filtre sur E une classe non vide F de parties de E telle que

$$A, B \in F \Rightarrow A \cap B \in F \text{ et } A \in F \wedge B \supset A \Rightarrow B \in F.$$

On admet, en particulier, le cas où F est la classe de toutes les parties de E (ce qui est équivalent à $\emptyset \in F$) et F est alors appelé filtre impropre, tous les autres filtres étant appelés propres. Une classe F' de parties de E est dite base du filtre F si

$$A \in F \Rightarrow \exists B \in F' \text{ avec } A \supset B.$$

Une classe F' est base d'un filtre si, et seulement si, elle est non vide et

$$A, B \in F' \Rightarrow \exists C \in F' \text{ avec } C \subset A \cap B.$$

Si $x \in E$ on représente par x^E le filtre de toutes les parties de E qui contiennent x , c'est-à-dire celui qui admet pour base $\{\{x\}\}$.

Si F et G sont des filtres sur E , $F \cap G$ est encore un filtre sur E , lequel va admettre pour base la classe des $A \cup B$ avec $A \in F$, $B \in G$ [†].

Etant donné une application $f: E \rightarrow E'$ et un filtre F sur E , on représente par $f(F)$ le filtre sur E' qui admet pour base les $f(A)$, $A \in F$. Si F est un filtre sur E et $E' \subset E$, on représente par F/E' , le filtre qui admet pour base les $A \cap E'$, $A \in F$; si $E' \in F$, F/E' est aussi la classe des $A \in F$ tels que $A \subset E'$. En représentant par $\iota: E' \rightarrow E$ l'inclusion canonique, alors, si F est un filtre sur E , $\iota(F/E') \supset F$, et $\iota(F/E') = F$ si, et seulement si, $E' \in F$. Si F' est un filtre sur E' , on voit que $\iota(F')/E' = F'$. Si E est le produit des ensembles E_i et si F_i sont des filtres sur les E_i , on définit le filtre produit $\prod F_i$ sur E comme étant celui qui admet pour base les ensembles $\prod A_i$, où $A_i \in F_i$ et, sauf pour un nombre fini d'indices, $A_i = E_i$.

[†] En fait $F \cap G$ coïncide avec cette classe. Assez souvent on dira qu'une certaine classe est base d'un filtre, bien qu'elle coïncide même avec ce filtre.

1.1 Définition. On appelle *quasi-topologie* π sur l'ensemble E la donnée, pour chaque $x \in E$, d'une classe $\pi(x)$ de filtres sur E vérifiant les conditions:

- QT 1) $F_1, F_2 \in \pi(x) \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \pi(x)$;
- QT 2) $F_1 \in \pi(x) \wedge F_2 \supset F_1 \Rightarrow F_2 \in \pi(x)$;
- QT 3) $x \in E \Rightarrow x^c \in \pi(x)$.

On appelle *espace quasi-topologique* le couple (E, π) , qui est souvent désigné par une seule lettre E , l'ensemble sous-jacent étant alors parfois noté $\underline{E}$. La relation $F \in \pi(x)$ s'écrit aussi $F \xrightarrow{\pi} x$ ou $F \xrightarrow{(E, \pi)} x$ (F converge dans π vers x).

1.2 Définition. Etant donné les espaces quasi-topologiques (E, π) et (E', π') , une application $f: E \rightarrow E'$ est dite *continue* pour π et π' si $F \xrightarrow{\pi} x \Rightarrow f(F) \xrightarrow{\pi'} f(x)$. Dans ce cas on dit aussi: $f: (E, \pi) \rightarrow (E', \pi')$ est continue.

On obtient une catégorie QT (qu'on appelle catégorie des espaces quasi-topologiques) en prenant comme objets les espaces quasi-topologiques (appartenant à un certain univers, si l'on veut éviter des difficultés logiques) et comme morphismes les triplets (E', f, F) , où E et E' sont des espaces quasi-topologiques et $f: E \rightarrow E'$ est continue. On a un foncteur d'oubli p_{QT} de QT vers EW (catégorie des applications entre ensembles), lequel est d'homomorphismes saturé. Toute application constante est continue. Les isomorphismes de QT sont appelés *homéomorphismes*.

Si T est une topologie sur l'ensemble E , on peut définir une quasi-topologie π_T sur E en posant

$$F \in \pi_T(x) \Leftrightarrow F \supset V_x \quad (V_x \text{ filtre des voisinages de } x \text{ pour } T) .$$

La correspondance qui à T associe π_T n'identifie pas de topologies (le filtre V_x étant le plus petit F qui converge vers x). Une application $f: E \rightarrow E'$ est continue pour T et T' si, et seulement si, elle est continue pour les quasi-topologies π_T et $\pi_{T'}$. On peut donc identifier la catégorie T des espaces topologiques avec une sous-catégorie pleine de QT , ce qui donne un sens à des affirmations telles que "cette quasi-topologie est une topologie".

Si (E, π) est un espace quasi-topologique, un ensemble $U \subseteq E$ est dit ouvert si $F \xrightarrow{\pi} x$ et $x \in U \Rightarrow U \in F$.

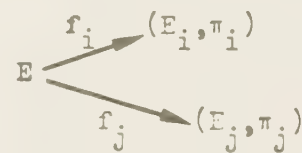
Si (E, π) était lui-même topologique, les ouverts de cette définition sont précisément les ouverts de la topologie. Dans tous les cas, les

ouverts de (E, π) sont les ouverts d'une topologie T_π sur E (qu'on appelle topologie associée à la quasi-topologie π). Un ensemble $A \subset E$ est fermé pour la topologie T_π si, et seulement si, quel que soit le filtre F propre dans A avec $\bigcap_{\pi} (F) \rightarrow a \in E$ (où $\iota: A \rightarrow E$ est l'inclusion), alors $a \in A$. (E, T_π) est une projection de (E, π) dans la sous-catégorie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{QT}$, le projecteur correspondant étant défini par 1_E . Si $f: E \rightarrow E'$ est continue pour π et π' , alors f est continue pour T_π et $T_{\pi'}$.

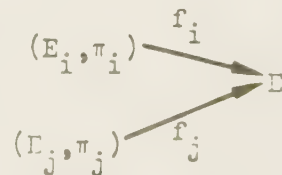
2. Les quasi-topologies initiales et finales

Les notions de structure initiale et finale peuvent se définir dès qu'on a un foncteur d'oubli. Les notions de quasi-topologie initiale et finale rentrent dans ce cadre, le foncteur d'oubli considéré étant $p_{\mathcal{QT}}$. On sait que, quand elles existent, les structures initiales permettent de construire des limites projectives (compatibles avec le foncteur d'oubli) et des sous-structures, et les structures finales permettent de construire des limites inductives (compatibles avec le foncteur d'oubli) et des structures quotients. Les quasi-topologies initiales et finales existent toujours:

2.1 Proposition. Soient les espaces quasi-topologiques (E_i, π_i) , l'ensemble E et les applications $f_i: E \rightarrow E_i$ ($i \in I$). Il existe alors sur E une quasi-topologie initiale π , c'est-à-dire une quasi-topologie telle que chaque f_i soit continue pour π et π_i et que, quels que soient l'espace quasi-topologique (E', π') et l'application $f: E' \rightarrow E$, telle que chaque $f_i \circ f$ soit continue pour π' et π_i , alors f soit continue pour π' et π . On a $F \xrightarrow{\pi} x$ si, et seulement si, $\forall i \in I, f_i(F) \xrightarrow{\pi_i} f_i(x)$.



2.2 Proposition. Soient les espaces quasi-topologiques (E_i, π_i) , l'ensemble E et les applications $f_i: E_i \rightarrow E$ ($i \in I$). Il existe alors sur E une quasi-topologie finale π , c'est-à-dire une quasi-topologie telle que chaque f_i soit continue pour π_i et π et que, quels que soient l'espace quasi-topologique (E', π') et l'appli-



cation $f:E \rightarrow E'$, telle que chaque $f \circ f_{i_1}$ soit continue pour π_{i_1} et π' , f soit continue pour π et π' . On a $F \xrightarrow{\pi} x$ si, et seulement si, il existe $F_1 \xrightarrow{\pi_{i_1}} x_1$, $F_2 \xrightarrow{\pi_{i_2}} x_2$, ..., $F_k \xrightarrow{\pi_{i_k}} x_k$ avec $f_{i_j}(x_j) = x$ et

$$F \supset x^E \cap f_{i_1}(F_1) \cap \dots \cap f_{i_k}(F_k) \quad (k \geq 0).$$

Les deux propositions antérieures entraînent que la catégorie QT est à limites projectives et inductives, compatibles avec le foncteur d'oubli p_{QT} . Les deux propositions suivantes indiquent les rapports entre topologies initiales et finales et quasi-topologies initiales et finales, propositions qui résultent du fait que $l_E:(E, \pi) \rightarrow (E, T_\pi)$ est un projecteur.

2.3 Proposition. Si T sur E est la topologie initiale définie par les espaces topologiques (E_i, T_i) et les applications $f_i:E \rightarrow E_i$, alors T est aussi la quasi-topologie initiale définie par les mêmes données.

2.4 Proposition. Si π sur E est la quasi-topologie finale définie par les espaces quasi-topologiques (E_i, π_i) et les applications $f_i:E_i \rightarrow E$, alors T_π est la topologie finale sur E déterminée par les (E_i, T_{π_i}) et les $f_i:E_i \rightarrow E$.

Remarquons que les correspondants de 2.3 pour les structures finales et de 2.4 pour les structures initiales ne sont valables que dans des cas particuliers.

On sait que, pour obtenir un produit (E, π) des espaces quasi-topologiques (E_i, π_i) , il suffit de prendre pour E le produit des E_i pour les projections $p_i:E \rightarrow E_i$ et prendre pour π la quasi-topologie initiale. De même, pour obtenir la quasi-topologie π' induite sur $E' \subseteq E$ par la quasi-topologie π sur E , il suffit de prendre la quasi-topologie initiale définie par (E, π) et l'inclusion $\iota:E' \rightarrow E$. Si E est un espace quasi-topologique, on considère sur chaque sous-ensemble de E la quasi-topologie induite si rien n'est précisé.

2.5 Proposition. Soit (E, π) l'espace quasi-topologique produit des (E_i, π_i) . Alors $F \xrightarrow{\pi} x = (x_i)$ si, et seulement si, il existe

$F_i \xrightarrow{\pi_i} x_i$ tels que $F \supset \prod F_i$.

2.6 Proposition. Soit π' la quasi-topologie induite sur $E' \subset E$ par (E, π) . Alors $F' \xrightarrow{\pi'} x' \in E'$ si, et seulement si, il existe $F \xrightarrow{\pi} x'$ tel que $F' \supset F/E'$.

On voit maintenant un cas où la proposition analogue à 2.4 pour les structures initiales est valable:

2.7 Proposition. Soient l'espace quasi-topologique (E, π) , $E' \subset E$ ouvert ou fermé dans π , et π' la quasi-topologie induite sur E' . Alors la topologie $T_{\pi'}$ est la topologie induite sur E' par la topologie T_{π} sur E .

Démonstration: $l_E: E \rightarrow E$ est continue pour π et T_{π} , et l_E est donc aussi continue pour π' et $(T_{\pi})/E'$, ce qui entraîne que $l_{E'}: E' \rightarrow E'$ est continue pour $T_{\pi'}$ et $(T_{\pi})/E'$. Il reste seulement à démontrer que l'application $l_{E'}: (E', (T_{\pi})/E') \rightarrow (E', T_{\pi'})$ est continue:

a) Supposons que E' est ouvert dans π (c'est-à-dire dans T_{π}). Si A est ouvert dans $T_{\pi'}$, on aura, pour chaque $x \in A$ et $F \xrightarrow{\pi} x$, $E' \in F$ et $F/E' \xrightarrow{\pi'} x$, donc $A \in F/E'$, $A \supset B \cap E'$ avec $B \in F$, d'où $A \in F$, ce qui montre que A est ouvert dans T_{π} et par suite dans $(T_{\pi})/E'$.

b) Supposons que E' est fermé dans π . Si A est fermé dans $T_{\pi'}$, alors, G étant un filtre propre dans A avec $\iota(G) \xrightarrow{\pi} x \in E$ (on considère les inclusions $\iota: A \rightarrow E$, $\iota': E' \rightarrow E$, $\iota'': A \rightarrow E'$), $\iota''(G)$ est un filtre propre dans E' avec $\iota'(\iota''(G)) = \iota(G) \xrightarrow{\pi} x$; parce que E' est fermé, $x \in E'$, et on obtient $\iota''(G) \xrightarrow{\pi'} x$; le fait que A soit fermé dans π' entraîne que $x \in A$; ainsi A est fermé dans T_{π} , et a fortiori dans $(T_{\pi})/E'$.

2.8 Proposition. Soient les espaces quasi-topologiques (E_i, π_i) , l'ensemble E , les applications $f_i: E_i \rightarrow E$, soit π sur E la quasi-topologie finale correspondante. Soient $A \subset E$, $A_i = f_i^{-1}(A)$, $f'_i: A_i \rightarrow A$ les restrictions des f_i . Alors π/A est la quasi-topologie finale déterminée par les π_i/A_i et les $f'_i: A_i \rightarrow A$.

Démonstration: Soit π' sur A cette quasi-topologie finale.

Le fait que les $f_i^!: A_i \rightarrow A$ sont continues pour π_i/A_i et π/A entraîne que $l_A: \pi' \rightarrow \pi/A$ est continue. Il reste à démontrer que $l_A: \pi/A \rightarrow \pi'$ est continue. Soit $F \xrightarrow{\pi/A} a$; alors (avec l'inclusion $\iota: A \rightarrow E$)

$\iota(F) \xrightarrow{\pi} a$, et il existe $F_1 \xrightarrow{\pi_{i_1}} a_1, \dots, F_k \xrightarrow{\pi_{i_k}} a_k$ ($k \geq 0$) avec

$$f_{i_j}(a_j) = a \text{ et } \iota(F) \supset a^E \cap f_{i_1}(F_1) \cap \dots \cap f_{i_k}(F_k);$$

en tenant compte du fait que

$$f_{i_j}(F_j)/A = f_{i_j}^!(F_j/A_{i_j}) \quad (\text{car } f_{i_j}(B \cap A_{i_j}) = f_{i_j}(B) \cap A),$$

on voit que

$$F = \iota(F)/A \supset (a^E \cap f_{i_1}(F_1) \cap \dots)/A = a^E/A \cap f_{i_1}(F_1)/A \cap \dots = a^E \cap f_{i_1}^!(F_1/A_{i_1}) \cap \dots$$

avec $F_j/A_{i_j} \xrightarrow{\pi_{i_j}/A_{i_j}} a_j$, ce qui montre que $F \xrightarrow{\pi} a$.

Remarquons que, dans le cas des topologies finales, la proposition antérieure n'est pas valable, sauf avec des conditions restrictives comme, par exemple, exiger que A soit ouvert ou fermé.

3. La quasi-topologie de la convergence locale

Etant donné les espaces quasi-topologiques (E, π) et (E', π') , on peut considérer l'ensemble $\text{Hom}(\pi', \pi)$ des applications continues de (E, π) vers (E', π') et l'application d'évaluation

$$\xi: \text{Hom}(\pi', \pi) \times E \rightarrow E' \text{ définie par } (f, x) \mapsto f(x).$$

Une quasi-topologie λ sur $\text{Hom}(\pi', \pi)$ est dite "bonne" (cf. [12]) si:

1) ξ est continue pour les quasi-topologies $\lambda \times \pi$ et π' .

2) Etant donné l'espace quasi-topologique (E'', π'') et l'application $g: E'' \rightarrow \text{Hom}(\pi', \pi)$ telle que l'application

$$\tilde{g}: E'' \times E \rightarrow E', \quad (x'', x) \mapsto g(x'')(x)$$

soit continue pour $\pi'' \times \pi$ et π' , alors g est continue pour π'' et λ .

Il existe une, et une seule, "bonne" quasi-topologie λ sur $\text{Hom}(\pi', \pi)$ qui est définie par la condition

$$F \xrightarrow{\lambda} f \Leftrightarrow \forall G \xrightarrow{\pi} x, \xi(F \times G) \xrightarrow{\pi'} f(x).$$

On appelle λ la quasi-topologie de la convergence locale ([3]), et c'est elle qu'on considère, sauf avis en contraire, sur les espaces fonctionnels $\text{Hom}(\pi', \pi)$. $\text{Hom}(\pi', \pi)$, muni de la quasi-topologie λ , est noté souvent $\text{Hom}(\pi', \pi)$. Si (E', π') est topologique et (E, π) top-

logique, localement compact et séparé, la quasi-topologie de la convergence locale sur $\text{Hom}(\pi', \pi)$ est une topologie, à savoir la topologie compacte ouverte.

La catégorie $\mathcal{QT}$ est une catégorie cartésienne fermée, au sens de Eilenberg et Kelly ({26}).

Les propositions qui suivent sont démontrées en utilisant une technique employée par Antoine dans {12}, ceci dans un cadre plus général.

3.1 Proposition. *Etant donné les espaces quasi-topologiques (E, π) , (E', π') et (E'', π'') , l'application de composition*

$$\eta: \text{Hom}(\pi'', \pi') \times \text{Hom}(\pi', \pi) \rightarrow \text{Hom}(\pi'', \pi), \quad (g, f) \mapsto g \circ f,$$
est continue.

3.2 Proposition. *Soient les espaces quasi-topologiques (E_i, π_i) , $i \in I$, les applications $f_i: F \rightarrow E_i$, soit π la quasi-topologie initiale sur E . Si (E', π') est un espace quasi-topologique, alors la quasi-topologie de $\text{Hom}(\pi, \pi')$ est la quasi-topologie initiale déterminée par les quasi-topologies des $\text{Hom}(\pi_i, \pi')$ et les applications*

$$\text{Hom}(f_i, 1_{E'}) : \text{Hom}(\pi, \pi') \rightarrow \text{Hom}(\pi_i, \pi').$$

3.3 Proposition. *Soient les espaces quasi-topologiques (E_i, π_i) , $i \in I$, (E'_j, π'_j) , $j \in J$, les applications $f_i: E_i \rightarrow E$, $f'_j: E'_j \rightarrow E'$ avec $E = \bigcup_i f_i(E_i)$, $E' = \bigcup_j f'_j(E'_j)$, soient π sur E et π' sur E' les quasi-topologies finales correspondantes. Alors $\pi \times \pi'$ est la quasi-topologie finale sur $E \times E'$ définie par les $\pi_i \times \pi'_j$ et les applications $f_i \times f'_j: E_i \times E'_j \rightarrow E \times E'$.*

3.4 Proposition. *Soient les espaces quasi-topologiques (E_i, π_i) , $i \in I$, les applications $f_i: E_i \rightarrow E$ telles que $E = \bigcup_i f_i(E_i)$, soit π la quasi-topologie finale sur E . Si (E', π') est un espace quasi-topologique, alors la quasi-topologie de $\text{Hom}(\pi', \pi)$ est la quasi-topologie initiale déterminée par les quasi-topologies des $\text{Hom}(\pi', \pi_i)$ et les applications*

$$\text{Hom}(1_{E'}, f_i) : \text{Hom}(\pi', \pi) \rightarrow \text{Hom}(\pi', \pi_i).$$

Remarquons que dans les propositions 3.3 et 3.4 les conditions $E = \bigcup_i f_i(E_i)$, $E' = \bigcup_j f'_j(E'_j)$ sont essentielles, et aussi que ces proposi-

tions ne sont plus valables si l'on met "topologie finale" à la place de "quasi-topologie finale".

4. Espaces quasi-topologiques séparés

4.1 Proposition. Soit (E, π) un espace quasi-topologique. Sont alors équivalentes les conditions :

A) Si F est un filtre propre avec $F \xrightarrow{\pi} x$ et $F \xrightarrow{\pi} y$, alors $x = y$.

B) Si $x \neq y$, $F \xrightarrow{\pi} x$, $G \xrightarrow{\pi} y$, alors il existe $A \in F$, $B \in G$ avec $A \cap B = \emptyset$.

C) La diagonale $\Delta_E = \{(x, y) \in E \times E / x = y\}$ est fermée dans $\pi \times \pi$.

Démonstration: A) $\Rightarrow$ B) : Supposant A), si $x \neq y$, $F \xrightarrow{\pi} x$, $G \xrightarrow{\pi} y$, on peut considérer le filtre H sur E ayant pour base les $A \cap B$, $A \in F$, $B \in G$, et l'on voit que $H \supset F$, $H \supset G$, donc $H \xrightarrow{\pi} x$, $H \xrightarrow{\pi} y$, ce qui entraîne que H est le filtre impropre, c'est-à-dire qu'il existe $A \in F$, $B \in G$ avec $A \cap B = \emptyset$.

B) $\Rightarrow$ C) : Supposant B), si $(x, y) \in E \times E - \Delta_E$ et $H \xrightarrow{\pi \times \pi} (x, y)$, on voit que $x \neq y$, $H \supset F \times G$ avec $F \xrightarrow{\pi} x$, $G \xrightarrow{\pi} y$ et, en choisissant $A \in F$, $B \in G$ avec $A \cap B = \emptyset$, on obtient $A \times B \in H$, $A \times B \cap \Delta_E = \emptyset$, $A \times B \subset E \times E - \Delta_E$, donc $E \times E - \Delta_E \in H$, ce qui montre que $E \times E - \Delta_E$ est ouvert dans $\pi \times \pi$, c'est-à-dire Δ_E est fermé dans $\pi \times \pi$.

C) $\Rightarrow$ A) : Supposant C), alors, si $F \xrightarrow{\pi} x$, $F \xrightarrow{\pi} y$, avec $x \neq y$, on a $(x, y) \in E \times E - \Delta_E$, $F \times F \xrightarrow{\pi \times \pi} (x, y)$, donc $E \times E - \Delta_E \in F \times F$ et il existe donc $A \in F$, $B \in F$ avec $A \times B \subset E \times E - \Delta_E$, $A \times B \cap \Delta_E = \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$, d'où $\emptyset \in F$, c'est-à-dire F est le filtre impropre.

4.2 Définition. Un espace quasi-topologique (E, π) est dit *séparé* s'il remplit les conditions A), B), C) de la proposition antérieure.

En regardant la condition B) on voit immédiatement que, si (E, π) est un espace topologique, la définition antérieure coïncide avec celle déjà connue dans ce cas.

4.3 Corollaire. Si (E, π) est séparé et $a \in E$, alors $\{a\}$ est fermé dans π .

Démonstration: L'application $f:E \rightarrow E \times E$, $x \mapsto (x, a)$ est continue pour π et $\pi \times \pi$, donc continue pour T_π et $T_{\pi \times \pi}$ et le corollaire résulte du fait que l'on a $\{a\} = f^{-1}(\Delta_E^\pi)$.

4.4 Corollaire. Si $f:E \rightarrow E'$ est continue pour les quasi-topologies π et π' , la deuxième étant séparée, alors le graphe $G = \{(x, y) \in E \times E' / y = f(x)\}$ est fermé dans $\pi \times \pi'$.

Démonstration: L'application $\bar{f} = f \times 1_{E'} : E \times E' \rightarrow E' \times E'$ est continue pour $\pi \times \pi'$ et $\pi' \times \pi'$, donc continue pour $T_{\pi \times \pi'}$ et $T_{\pi' \times \pi'}$, et le corollaire résulte de l'égalité $G = \bar{f}^{-1}(\Delta_{E'}^{\pi'})$.

4.5 Proposition. Soient les espaces quasi-topologiques séparés (E_i, π_i) et les applications $f_i:E \rightarrow E_i$ telles que, pour chaque couple (x, y) de points distincts de E , il existe i avec $f_i(x) \neq f_i(y)$. Soit π sur E la quasi-topologie initiale. Alors π est séparée.

Démonstration: Pour chaque i l'application $f_i \times f_i : E \times E \rightarrow E_i \times E_i$ est continue pour $\pi \times \pi$ et $\pi_i \times \pi_i$, donc aussi continue pour $T_{\pi \times \pi}$ et $T_{\pi_i \times \pi_i}$; si

$$\Delta_i = \{(x, y) \in E \times E / f_i(x) = f_i(y)\} = (f_i \times f_i)^{-1}(\Delta_{E_i}^{\pi_i}),$$

Δ_i est fermé dans $\pi \times \pi$ et, parce que $\Delta_E = \bigcap_i \Delta_i$, Δ_E est fermé dans $\pi \times \pi$, et (E, π) est séparé.

4.6 Corollaire. Si les espaces quasi-topologiques (E_i, π_i) sont séparés, alors leur produit (E, π) est séparé. Si l'espace quasi-topologique (E, π) est séparé et $E' \subset E$, alors $\pi|_{E'}$ est une quasi-topologie **séparée**.

4.7 Proposition. Etant donné les espaces quasi-topologiques (E, π) et (E', π') , π' étant séparée, alors la quasi-topologie de la convergence locale sur $\text{Hom}(\pi', \pi)$ est séparée.

On va chercher maintenant des conditions de séparation des quasi-topologies finales.

4.8 Lemme. Soient les espaces quasi-topologiques (E_i, π_i) , les applications $f_i:E_i \rightarrow E$ et π sur E la quasi-topologie finale. Soit $E' = \bigcup f_i(E_i)$, $\pi' = \pi|_{E'}$ et $f'_i:E_i \rightarrow E'$ les restrictions des f_i . Alors π' est la quasi-topologie finale déterminée par les π_i et les

$f'_i: E_i \rightarrow E'$, et π' est séparée si, et seulement si, π est séparée.

Démonstration: Le fait que π' est la quasi-topologie finale est un cas particulier de la proposition 2.8. Si π est séparée, alors d'après le corollaire 4.6 π' est séparée. Supposons donc π' séparée.

Nous remarquons maintenant que, si $F \xrightarrow{\pi} x \in E'$, alors $E' \in F$ (c'est-à-dire E' est ouvert dans π) : En effet

$$F \supset x \in \cap_{i_1} f_{i_1}(F_1) \cap \dots \cap_{i_k} f_{i_k}(F_k) \quad (k \geq 0)$$

avec $F_j \xrightarrow{\pi_{i_j}} x_j$, $f_{i_j}(x_j) = x$, donc

$$E' \supset \{x\} \cup f_{i_1}(E_{i_1}) \cup \dots \cup f_{i_k}(E_{i_k}) \in F, \quad E' \in F.$$

D'autre part, si $G \xrightarrow{\pi} y \notin E'$, $G \supset y \notin E'$. Si $F \xrightarrow{\pi} x \in E'$ et $G \xrightarrow{\pi} y \notin E'$, on voit donc que $E' \in F$, $\{y\} \in G$ avec $E' \cap \{y\} = \emptyset$. Si $G_1 \xrightarrow{\pi} y_1$, $G_2 \xrightarrow{\pi} y_2$, $y_1, y_2 \notin E'$, $y_1 \neq y_2$, alors $\{y_1\} \in G_1$, $\{y_2\} \in G_2$, avec $\{y_1\} \cap \{y_2\} = \emptyset$. Si $F_1 \xrightarrow{\pi} x_1$, $F_2 \xrightarrow{\pi} x_2$, $x_1, x_2 \in E'$, $x_1 \neq x_2$, alors $F_1/E' \xrightarrow{\pi'} x_1$, $F_2/E' \xrightarrow{\pi'} x_2$; parce que π' est séparée, il existe $A_1 \in F_1$, $A_2 \in F_2$ avec $A_1, A_2 \subset E'$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ (car $E' \in F_1$ et $E' \in F_2$). Ceci termine la démonstration que π est séparée.

4.9 Proposition. Soient les espaces quasi-topologiques (E_i, π_i) , les applications $f_i: E_i \rightarrow E$, soit π sur E la quasi-topologie finale. Alors π est séparée si, et seulement si, $\forall i, j$ l'ensemble

$$A_{i,j} = \{(x, y) \in E_i \times E_j / f_i(x) = f_j(y)\}$$

est fermé dans $\pi_i \times \pi_j$.

Démonstration: En tenant compte du lemme antérieur on peut déjà supposer que $E = \cup f_i(E_i)$ et alors, d'après la proposition 3.3, $\pi \times \pi$ est la quasi-topologie finale déterminée par les $\pi_i \times \pi_j$ et les applications $f_i \times f_j: E_i \times E_j \rightarrow E \times E$. Or, d'après 2.4, $T_{\pi \times \pi}$ est la topologie finale déterminée par les $f_i \times f_j$ et les $T_{\pi_i \times \pi_j}$, ce qui entraîne que Δ_E est fermé dans $\pi \times \pi$ si, et seulement si, les $A_{i,j} = (f_i \times f_j)^{-1}(\Delta_E)$ sont fermés dans $\pi_i \times \pi_j$.

4.10 Corollaire. Etant donné l'espace quasi-topologique (E, π) et la relation d'équivalence ρ sur E , alors l'espace quasi-topologique quotient $(\frac{E}{\rho}, \frac{\pi}{\rho})$ est séparé si, et seulement si, le graphe $C = \{(x, y) \in E \times E / x \rho y\}$ de ρ est fermé dans $\pi \times \pi$.

Remarquons que la proposition et le corollaire antérieur ne sont plus valables pour les topologies finales sauf dans des cas particuliers. On peut trouver un contre-exemple dans {13} , §8 , exercice 10 .

On peut démontrer ({27}) que, si QT_{sep} est la sous-catégorie pleine de QT dont les unités sont les espaces séparés, le foncteur inclusion $i: QT_{sep} \rightarrow QT$ admet un adjoint à gauche.

5. Espaces quasi-topologiques compacts

Etant donné un ensemble E , un ultrafiltre sur E est un élément maximal de la classe des filtres propres sur E . F est un ultrafiltre si, et seulement si, il est propre et si, pour chaque $A \subseteq E$, $A \in F$ ou $E-A \in F$. A l'aide de l'axiome de Zorn on voit que tout filtre propre sur E est contenu dans un ultrafiltre et est même l'intersection des ultrafiltres qui le contiennent.

Etant donné un espace quasi-topologique (E, π) , on dit qu'un filtre F sur E admet une sous-limite $a \in E$ s'il existe un filtre propre G avec $G \supset F$ et $G \xrightarrow{\pi} a$. Il n'y a que les filtres propres qui peuvent avoir des sous-limites. Si F est un filtre propre avec $F \xrightarrow{\pi} a$, alors a est une sous-limite de F , qui est d'ailleurs l'unique sous-limite si π est séparée. Si F est un ultrafiltre, F a une sous-limite a si, et seulement si, $F \xrightarrow{\pi} a$.

5.1 Proposition. Soit (E, π) un espace quasi-topologique. Sont alors équivalentes les conditions:

- A) Tout filtre propre admet une sous-limite.
- B) Tout ultrafiltre est convergent.

5.2 Définition. Un espace quasi-topologique est dit *compact* s'il vérifie les conditions A) et B) de la proposition antérieure. Si (E, π) est un espace quasi-topologique, $A \subseteq E$ est dit *compact* si l'espace quasi-topologique $(A, \pi|_A)$ est compact.

Si (E, π) est un espace topologique, il est compact au sens de la définition antérieure si, et seulement si, il est compact au sens usuel (quasi-compact chez Bourbaki, parce qu'on n'exige pas la séparation).

5.3 Proposition. (Tychonoff). Si les espaces quasi-topologiques

(E_i, π_i) sont compacts, alors leur produit (E, π) est compact.

5.4 Proposition. Soit $f: (E, \pi) \rightarrow (E', \pi')$ une application continue et surjective. Alors, si π est compacte, π' est aussi compacte.

5.5 Corollaire. Si (E, π) est un espace quasi-topologique compact, la topologie associée T_π est aussi compacte.

5.6 Proposition. Si (E, π) est compact, $A \subset E$ et A fermé, alors A est compact. Si (E, π) est séparé et si A est compact dans (E, π) , alors A est fermé.

5.7 Proposition. Etant donné l'espace quasi-topologique (E, π) et $A, B \subset E$ des ensembles compacts, alors $A \cup B$ est compact.

Démonstration: Soit F un filtre propre dans $A \cup B$, l'un des filtres F/A , F/B est propre (s'ils étaient impropres il existerait $C_1, C_2 \in F$ avec $A \cap C_1 = B \cap C_2 = \emptyset$, d'où $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, $\emptyset \in F$). Supposons par exemple F/A propre; comme π/A est compacte, il existe un filtre propre G dans A avec $G \supset F/A$, $G \xrightarrow{\pi/A} a \in A$; alors ($\iota: A \rightarrow A \cup B$ étant l'inclusion) $\iota(G)$ est un filtre propre dans $A \cup B$, avec $\iota(G) \xrightarrow{\pi/A \cup B} a$ et $\iota(G) \supset \iota(F/A) \supset F$, ce qui montre que F admet la sous-limite a dans $\pi/A \cup B$.

5.8 Remarque. On ne saurait s'attendre à ce que toutes les propriétés des espaces topologiques compacts se généralisent aux quasi-topologies. En particulier les "propositions": "Dans un espace quasi-topologique compact un filtre F ayant une seule sous-limite a converge vers a " et "Si $f: (E, \pi) \rightarrow (E', \pi')$ est une bijection continue et si π est compacte et π' séparée, alors f est un homéomorphisme" sont fausses.

5.9 Exemple. Soit $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\| = 1\}$, $E_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\| \leq 1\}$ avec la topologie induite par la topologie canonique du plan $\mathbb{R}^2$. Soit $f: S_1 \times [0, 1] \rightarrow E_2$ l'application $(x, t) \mapsto tx$. f étant surjective, $S_1 \times [0, 1]$ étant compact et E_2 étant séparé, la topologie de E_2 est la topologie finale déterminée par f et la topologie de $S_1 \times [0, 1]$ (si T est cette topologie finale, elle est compacte et ι_{E_2} est continue et bijective de T dans E_2 , donc c'est un homéomorphisme). Soit π sur

E_2 la quasi-topologie finale déterminée par $f: S_1 \times [0,1] \rightarrow E_2$ et la topologie de $S_1 \times [0,1]$. D'après 5.4, π est une quasi-topologie compacte, et $1_{E_2}: (E_2, \pi) \rightarrow E_2$ est continue. On va voir cependant que $1_{E_2}: (E_2, \pi) \rightarrow E_2$ n'est pas un homéomorphisme, c'est-à-dire π n'est pas la topologie de E_2 .

S'il en était ainsi, en représentant par V_u les filtres de voisinages en u , on aurait

$$V_0 \supset f(V_{(x_1,0)}) \cap \dots \cap f(V_{(x_n,0)}) \quad (x_i \in S_1)$$

et, si $x \in S_1$ est différent de tous les x_i , on pourrait choisir $V \in V_{(x,0)}$, $V_i \in V_{(x_i,0)}$ avec $V \cap V_i = \emptyset$; alors, en posant

$$\tilde{V} = \bigcap_{i=1}^n f(V_i), \text{ on obtiendrait}$$

$$\tilde{V} \in f(V_{(x_1,0)}) \cap \dots \cap f(V_{(x_n,0)}), \quad \tilde{V} \in V_0,$$

et la suite $((x, \frac{1}{n}))_{n \geq 1}$ d'éléments de V

convergerait vers $(x, 0)$, donc $f(x, \frac{1}{n}) \xrightarrow{E_2} 0$ avec

$$f(x, \frac{1}{n}) \notin \tilde{V}, \text{ ce qui est absurde.}$$

On dira qu'un espace quasi-topologique (E, π) est semi-topologique si, pour chaque $x \in E$, il existe un filtre minimum dans $\pi(x)$ ou, ce qui est équivalent, si

$$F_i \xrightarrow{\pi} x \quad (i \in I) \Rightarrow \bigcap F_i \xrightarrow{\pi} x.$$

Tout espace topologique est semi-topologique, le filtre minimum dans $\pi(x)$ étant le filtre des voisinages de x .

5.10 Proposition. Si (E, π) est un espace semi-topologique compact et si le filtre F admet une seule sous-limite a , alors $F \xrightarrow{\pi} a$.

Démonstration: On sait que $F = \bigcap F_i$, où les F_i sont les ultra-filtres plus grands que F ; alors $F_i \xrightarrow{\pi} a_i$ (π est compact), ce qui entraîne que a_i est sous-limite de F , donc $a_i = a$, et $F \xrightarrow{\pi} a$, car π est semi-topologique.

5.11 Proposition. Soit $f: (E, \pi) \rightarrow (E', \pi')$ une bijection continue, où (E, π) est un espace semi-topologique compact et (E', π') un espace quasi-topologique séparé. Alors f est un homéomorphisme.

Démonstration: Soit $F' \xrightarrow[\pi']{} x'$; on doit voir que

$$f^{-1}(F') \xrightarrow[\pi]{} x = f^{-1}(x')$$

et on peut déjà supposer que $f^{-1}(F')$ est un filtre propre (sans quoi il converge vers tous les points). Si a est une sous-limite de $f^{-1}(F')$, il existe $G \xrightarrow[\pi]{} a$, G filtre propre, $G \supset f^{-1}(F')$, et $f(G)$ est un filtre propre avec $f(G) \xrightarrow[\pi]{} f(a)$, $f(G) \supset F'$, donc $f(G) \xrightarrow[\pi]{} x'$, ce qui, parce que π' est séparée, entraîne que $x' = f(a)$, $a = x$. Ainsi $f^{-1}(F')$ admet une seule sous-limite x , donc, d'après 5.10, on a $f^{-1}(F') \xrightarrow[\pi]{} x$.

5.12 Proposition. Soit (E, π) un espace quasi-topologique compact et non vide, et considérons sur R sa topologie canonique. Il existe alors deux applications continues

$$m, M: \text{Hom}(R, \pi) \rightarrow R$$

qui associent à chaque application continue $f: (E, \pi) \rightarrow R$ sa valeur minimum et sa valeur maximum respectivement.

Démonstration: Pour chaque application continue $f: (E, \pi) \rightarrow R$, $f(E)$ est, d'après 5.4, un compact de R et admet donc un minimum et un maximum, ce qui montre que les applications m et M sont bien définies. Il suffit de démontrer la continuité de m , parce que $M: \text{Hom}(R, \pi) \rightarrow R$ se décompose sous la forme:

$$\text{Hom}(R, \pi) \xrightarrow{f \mapsto -f} \text{Hom}(R, \pi) \xrightarrow{m} R \xrightarrow{x \mapsto -x} R.$$

Soit $f: (E, \pi) \rightarrow R$, $\lambda = m(f)$ et $F \in \lambda(f)$ (où λ est la quasi-topologie de la convergence locale); tout se réduit à démontrer que $m(F) \supset V_\lambda$, où V_λ est le filtre des voisinages de λ dans R . Etant donné $\varepsilon > 0$, on peut choisir $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = \lambda$ et, si l'on tient compte de la continuité de l'application

$$\eta: \text{Hom}(R, \pi) \rightarrow R, \quad g \mapsto g(x_0),$$

on voit que $\eta(F) \supset V_\lambda$ et qu'il existe donc $\phi_0 \in F$ avec

$$\eta(\phi_0) \in]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[,$$

ce qui entraîne que, $\forall g \in \phi_0$, $g(x_0) \in]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[$, $m(g) < \lambda + \varepsilon$. Le résultat sera démontré si l'on voit qu'il existe $\phi_1 \in F$ tel que,

$\forall g \in \phi_1$, $m(g) > \lambda - \varepsilon$, car alors

$$\forall g \in \phi_0 \cap \phi_1 \in F, \quad m(g) \in]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[.$$

Supposons donc qu'il n'en soit pas ainsi, c'est-à-dire que, $\forall \phi \in F$, il existe $g \in \phi$ et $x \in E$ tels que $g(x) \leq \lambda - \varepsilon$. Soit, pour chaque

$\phi \in F$, $A_\phi = \{x \in E / \exists g \in \phi \text{ avec } g(x) \leq l - \epsilon\}$. Les A_ϕ sont non vides et, puisque $A_{\phi_1} \cap A_{\phi_2} \supset A_{\phi_1 \cap \phi_2}$, les A_ϕ vont constituer une base d'un filtre F propre sur E . Comme (E, π) est compact, F admet une sous-limite a , c'est-à-dire qu'il existe un filtre propre $G \supset F$ avec $G \xrightarrow{\pi} a$. Alors $F(G) \xrightarrow{R} l' = f(a) \geq l$, $F(G) \supset V_l$, et il existe donc $\phi_2 \in F$, $B \in G$ avec $\phi_2(B) \subset]l' - \epsilon, l' + \epsilon[$, ce qui entraîne que $A_{\phi_2} \cap B = \emptyset$ et $\emptyset \in G$; ceci est absurde, G étant propre.

5.13 Proposition. Soient les espaces quasi-topologiques (E, π) et (E', π') et considérons sur l'ensemble $\text{Hom}(\pi', \pi)$ des applications continues de (E, π) vers (E', π') la quasi-topologie λ de la convergence locale. Si $K \subset E$ et $U \subset E'$, notons $[K \rightarrow U]$ la classe des $f \in \text{Hom}(\pi', \pi)$ tels que $f(K) \subset U$. Alors, si K est compact dans π et U est ouvert dans π' , $[K \rightarrow U]$ est ouvert dans λ .

Démonstration: Soit $f: (E, \pi) \rightarrow (E', \pi')$ continue avec $f(K) \subset U$; soit $F \in \lambda(f)$, on doit voir que $[K \rightarrow U] \in F$. Supposons qu'il n'en est pas ainsi. Alors, $\forall \phi \in F$ il existe $g \in \phi$ avec $g(K) \not\subset U$, donc il existe $g \in \phi$, $x \in K$, avec $g(x) \notin U$. Soit, pour chaque $\phi \in F$, $A_\phi = \{x \in K / \exists g \in \phi \text{ avec } g(x) \notin U\}$; A_ϕ est non vide et, comme $A_{\phi_1} \cap A_{\phi_2} \supset A_{\phi_1 \cap \phi_2}$, les A_ϕ constituent une base d'un filtre propre F sur K . Parce que π/K est compacte, F aura une sous-limite $a \in K$, c'est-à-dire il existe un filtre G propre sur K avec $G \supset F$ et $G \xrightarrow{\pi/K} a$. Alors, notant $\iota: K \rightarrow E$ l'inclusion, $\iota(G) \xrightarrow{\pi} a$, donc $F(\iota(G)) \xrightarrow{\pi'} f(a) \in U$; puisque U est ouvert dans π' , $U \in F(\iota(G))$ et il existe $\phi \in F$, $A \in G$ avec $U \supset \phi(A)$, ce qui entraîne $A \cap A_\phi = \emptyset$ et $\emptyset \in G$; ceci est absurde, G étant propre.

6. Applications quasi-ouvertes

Rappelons qu'une application entre espaces topologiques est dite ouverte si l'image de tout ouvert du premier espace est un ouvert du second. Pour les espaces quasi-topologiques on posera:

6.1 Définition. Soient les espaces quasi-topologiques (E, π) et (E', π') . Une application $f: E \rightarrow E'$ est dite *quasi-ouverte* pour π et π' si, pour tout $x \in E$ et pour tout $F' \in \pi'(f(x))$, il existe $F \in \pi(x)$ tel que $f(F) \subset F'$. On dira aussi que $f: (E, \pi) \rightarrow (E', \pi')$ est quasi-ouverte.

6.2 Proposition. Si $f:(E,\pi) \rightarrow (E',\pi')$ est quasi-ouverte, alors f est une application ouverte pour les topologies T_π et $T_{\pi'}$, associées.

Démonstration: Soit U un ouvert de π . Si $y \in f(U)$ et $G \in \pi'(y)$, alors $y = f(x)$, $x \in U$, et il existe donc $F \xrightarrow{\pi} x$ avec $f(F) \subset G$. Il s'ensuit $U \in F$, donc $f(U) \in G$, ce qui montre que $f(U)$ est un ouvert de π' .

6.3 Proposition. Si $E=(E,\pi)$ et $E'=(E',\pi')$ sont des espaces topologiques, alors $f:E \rightarrow E'$ est quasi-ouverte si, et seulement si, elle est ouverte.

Démonstration: Supposant f ouverte on voit que, pour chaque $x \in E$, $f(V_x) \subset V'_{f(x)}$ (V_x et $V'_{f(x)}$ étant les filtres de voisinages), car, si $B \in f(V_x)$, $B \supset f(A)$ pour un ouvert A contenant x et $f(A)$ est un ouvert contenant $f(x)$, donc $B \in V'_{f(x)}$.

Si $F' \xrightarrow{\pi'} f(x)$, on obtient $F' \supset V'_{f(x)} \supset f(V_x)$ avec $V_x \xrightarrow{\pi} x$, de sorte que f est quasi-ouverte. La réciproque résulte de la proposition antérieure.

On vérifie immédiatement la proposition suivante:

6.4 Proposition. Si $f:(E,\pi) \rightarrow (E',\pi')$ et $g:(E',\pi') \rightarrow (E'',\pi'')$ sont quasi-ouvertes, $g \circ f:(E,\pi) \rightarrow (E'',\pi'')$ est quasi-ouverte. Tout homéomorphisme est une application quasi-ouverte.

Comme pour les applications ouvertes on a les propositions suivantes:

6.5 Proposition. Soient les espaces quasi-topologiques $E=(E,\pi)$, $E'=(E',\pi')$, $E''=(E'',\pi'')$, $f:E \rightarrow E'$ une application continue et surjective, soit $g:E' \rightarrow E''$ une application telle que $g \circ f:E \rightarrow E''$ soit quasi-ouverte. Alors $g:E' \rightarrow E''$ est quasi-ouverte.

Démonstration: Soit $x' \in E'$ et $F'' \in \pi''(g(x'))$; alors $x' = f(x)$, donc $F'' \in \pi''(g \circ f(x))$, ce qui entraîne qu'il existe $F \in \pi(x)$ avec $g \circ f(F) \subset F''$; il s'ensuit $g(f(F)) \subset F''$ avec $f(F) \in \pi'(x')$.

6.6 Proposition. Soient les espaces quasi-topologiques $E=(E,\pi)$, $E'=(E',\pi')$, $E''=(E'',\pi'')$, $g:E' \rightarrow E''$ une application continue et injective, $f:E \rightarrow E'$ une application telle que $g \circ f:E \rightarrow E''$ soit quasi-

continue. Alors $f:E \rightarrow E'$ est quasi-ouverte.

Démonstration: Soit $x \in E$, $F' \xrightarrow{\pi'} f(x)$; alors $g(F') \xrightarrow{\pi''} \text{gof}(x)$ et il existe $F \xrightarrow{\pi} x$ avec $\text{gof}(F) \subset g(F')$, $g(f(F)) \subset g(F')$, ce qui entraîne que $f(F) \subset F'$ (si $A \in F$, alors $g(f(A)) \supset g(B)$, $B \in F'$, donc, g étant injective, $f(A) \supset B$ et $f(A) \in F'$).

6.7 Proposition. Soit (E, π) un espace quasi-topologique, soit $A \subset E$ et $\iota:A \rightarrow E$ l'inclusion. Alors ι est quasi-ouverte pour π/A et π si, et seulement si, A est ouvert dans π .

Démonstration: Si ι est quasi-ouverte, A étant ouvert dans π/A , d'après 6.2, $A = \iota(A)$ est ouvert dans π . Supposant A ouvert dans π , si $x \in A$ et $F \xrightarrow{\pi} \iota(x) = x$, on a $A \in F$, donc $F = \iota(F/A)$ où $F/A \xrightarrow{\pi/A} a$, ce qui montre que ι est quasi-ouverte.

6.8 Proposition. Soient les espaces quasi-topologiques (E, π) et (E', π') , soit $f:E \rightarrow E'$ une application telle que, pour tout $x \in E$, il existe $A \subset E$ vérifiant:

$x \in A$ et $f/A:A \rightarrow E'$ est quasi-ouverte pour π/A et π' . Alors f est quasi-ouverte pour π et π' .

Démonstration: Si $x \in E$ et $F' \in \pi'(f(x))$, soit $A \subset E$ avec $x \in A$ et $f/A:A \rightarrow E'$ quasi-ouverte pour π/A et π' . Il existe alors $F \xrightarrow{\pi/A} x$ avec $f/A(F) \subset F'$ et l'on a ($\iota:A \rightarrow E$ étant l'inclusion) $\iota(F) \xrightarrow{\pi} x$ avec $f(\iota(F)) = f/A(F) \subset F'$, ce qui montre que f est quasi-ouverte.

6.9 Proposition. Soient les espaces quasi-topologiques (E, π) et (E', π') et $f:(E, \pi) \rightarrow (E', \pi')$ une application continue, quasi-ouverte et surjective. Alors π' est la quasi-topologie finale déterminée par f et π .

Démonstration: Soit (E'', π'') un espace quasi-topologique et soit $g:E' \rightarrow E''$ une application telle que $\text{gof}:E \rightarrow E''$ soit continue pour π et π'' . Si $x' \in E'$ et $F' \in \pi'(x')$, soit $x \in E$ tel que $x' = f(x)$, soit $F \in \pi(x)$ avec $f(F) \subset F'$. Alors $\text{gof}(F) \in \pi''(\text{gof}(x)) = \pi''(g(x'))$ et $g(F') \supset g(f(F)) = \text{gof}(F)$, donc $g(F') \in \pi''(g(x'))$, ce qui montre que g est continue.

La proposition antérieure nous montre un cas où une topologie fina-

le est aussi une quasi-topologie finale, à savoir celui où on a une application continue ouverte et surjective entre deux espaces topologiques. Un autre exemple d'une telle situation sera fourni par la proposition qui va suivre. Rappelons qu'une application entre deux espaces topologiques est dite fermée si l'image de tout fermé du premier espace est un fermé du second. On sait que toute application continue d'un espace topologique compact dans un espace topologique séparé est fermée. On sait aussi que, pour toute application continue fermée et surjective entre espaces topologiques, la topologie du second espace est la topologie finale définie par l'application et la topologie du premier. Cette topologie finale n'est pas forcément une quasi-topologie finale, comme le montre l'exemple 5.9, mais il en est ainsi si les fibres sont finies:

6.10 Proposition. Soient les espaces topologiques (E, π) et (E', π') , et soit $f: (E, \pi) \rightarrow (E', \pi')$ une application continue, fermée et surjective, telle que, $\forall x' \in E'$, $f^{-1}(x')$ soit fini. Alors π' est la quasi-topologie finale sur E' déterminée par f et π .

Démonstration: Pour chaque $y \in E'$ (resp. $x \in E$) soit V'_y (resp. V_x) le filtre des voisinages de y (resp. x) pour π' (resp. π). On va voir que $V'_y \supset \overline{x \in f^{-1}(y)} f(V_x)$. Or, si A_x est un ouvert de E avec $x \in A_x$, pour chaque $x \in f^{-1}(y)$, alors UA_x est un ouvert, donc $E - UA_x$ est un fermé, ce qui entraîne que $f(E - UA_x)$ est fermé dans E' , et $y \notin f(E - UA_x)$. Comme f est surjective, $f(E - UA_x) \supset E' - f(UA_x)$, donc $y \in E' - f(E - UA_x) \subset f(UA_x)$, avec $E' - f(E - UA_x)$ ouvert, ce qui montre que $Uf(A_x) = f(UA_x) \in V'_y$, et par suite $\overline{x \in f^{-1}(y)} f(V_x) \subset V'_y$. Soient $x_1, \dots, x_n$ les points $x \in E$ tels que $y = f(x)$; on voit que, si $F \xrightarrow{\pi'} y$,

$$F \supset V'_y \supset f(V_{x_1}) \cap \dots \cap f(V_{x_n}) \text{ avec } V_{x_i} \xrightarrow{\pi} x_i,$$

c'est-à-dire $F \rightarrow y$ pour la quasi-topologie finale. Réciproquement si $F \rightarrow y$ pour la quasi-topologie finale, on a aussi $F \xrightarrow{\pi'} y$, car 1_E doit être continue de la quasi-topologie finale dans π' , à cause de la continuité de f de π dans π' .

7. Familles localement finies et familles finalisantes

7.1 Définition. Soit (E, π) un espace quasi-topologique. Une famille $(A_j)_{j \in J}$ de sous-ensembles de E est dite *localement finie* si, quel que soit $F \xrightarrow{\pi} x$, il existe $A \in F$, $j_1, \dots, j_n \in J$ avec $A \cap A_j = \emptyset \quad \forall j \neq j_1, \dots, j_n$.

Il est clair que, si (E, π) est un espace topologique, cette définition coïncide avec la notion classique qui revient à exiger que la propriété antérieure se vérifie pour les filtres V_x des voisinages. Il est clair aussi qu'une famille localement finie est aussi une famille ponctuellement finie (c'est-à-dire chaque $x \in E$ appartient au plus à un nombre fini de A_j), car il suffit dans la définition de considérer les filtres $x \xrightarrow{\pi} x$. Il est bien évident qu'une sous-famille d'une famille localement finie est encore localement finie, et que, si $(A_j)_{j \in J}$ est localement finie et si $B_j \subset A_j$, alors $(B_j)_{j \in J}$ est localement finie.

7.2 Proposition. Si $(A_j)_{j \in J}$ est une famille localement finie dans l'espace quasi-topologique (E, π) et $E' \subset E$, alors $(E' \cap A_j)_{j \in J}$ est une famille localement finie dans $(E', \pi_{/E'})$.

Démonstration: Si $F \xrightarrow{\pi_{/E'}} x$, on a $\iota(F) \xrightarrow{\pi} x$ et il existe $A \in F$, $j_1, \dots, j_n \in J$ tels que $A \cap A_j = \emptyset$, $\forall j \neq j_1, \dots, j_n$; donc $A \cap (E' \cap A_j) = \emptyset \quad \forall j \neq j_1, \dots, j_n$.

7.3 Proposition. Soient (E, π) un espace quasi-topologique compact et $(A_j)_{j \in J}$ une famille localement finie de sous-ensembles non vides. Alors J est fini.

Démonstration: Supposons J infini. Pour chaque partie finie J' de J , soit $B_{J'} = \bigcap_{j \in J'} A_j$. Alors $B_{J'} \neq \emptyset$ et $B_{J'_1} \cap B_{J'_2} \supset B_{J'_1 \cup J'_2}$ avec $J'_1 \cup J'_2$ encore fini, ce qui entraîne que les $B_{J'}$ constituent une base d'un filtre propre F sur E . Si $a \in E$ est une sous-limite de F , il existe un filtre propre $G \supset F$ avec $G \xrightarrow{\pi} a$. Il existe $B \in G$, $j_1, \dots, j_n \in J$ avec $B \cap A_j = \emptyset \quad \forall j \neq j_1, \dots, j_n$, de sorte que $B \cap B_{\{j_1, \dots, j_n\}} = \emptyset$, $\emptyset \in G$; ceci est absurde, G étant propre.

7.4 Corollaire. Si $(A_j)_{j \in J}$ est une famille localement finie

de sous-ensembles de l'espace quasi-topologique (E, π) , alors, pour chaque ensemble compact $A \subseteq E$, il existe $j_1, \dots, j_n \in J$ tels que $A \cap A_{j_i} = \emptyset \quad \forall i \neq j_1, \dots, j_n$.

7.5 Proposition. Soient (E, π) un espace quasi-topologique et $(A_j)_{j \in J}$ une famille localement finie de sous-ensembles fermés. Alors $A = \bigcup_{j \in J} A_j$ est fermé dans π .

Démonstration: Soit F un filtre propre sur A avec $\iota(F) \xrightarrow{\pi} a$. Il existe $B \in F$, $j_1, \dots, j_n \in J$ avec $B \cap A_{j_i} = \emptyset \quad \forall i \neq j_1, \dots, j_n$, ce qui entraîne que $B \subseteq A_{j_1} \cup \dots \cup A_{j_n}$, donc $A_{j_1} \cup \dots \cup A_{j_n} \in F$, $F = \iota'(F / A_{j_1} \cup \dots \cup A_{j_n})$; en particulier $F / A_{j_1} \cup \dots \cup A_{j_n}$ est un filtre propre. Alors $\iota \iota'(F / A_{j_1} \cup \dots \cup A_{j_n}) = \iota(F) \xrightarrow{\pi} a$ et, $A_{j_1} \cup \dots \cup A_{j_n}$ étant fermé, il en résulte $a \in A_{j_1} \cup \dots \cup A_{j_n}$, d'où $a \in A$.

7.6 Définition. Soit (E, π) un espace quasi-topologique. Une famille $(A_j)_{j \in J}$ de sous-ensembles de E est dite *finalisante* si, quel que soit $F \xrightarrow{\pi} x$, il existe $j_1, \dots, j_n \in J$ ($n \geq 0$) avec $x \in A_{j_i}$ et $\{x\} \cup A_{j_1} \cup \dots \cup A_{j_n} \in F$.

7.7 Proposition. Si $(A_j)_{j \in J}$ est un recouvrement ouvert ou un recouvrement fermé et localement fini, alors c'est une famille finalisante de (E, π) .

Démonstration: Si $(A_j)_{j \in J}$ est un recouvrement ouvert et si $F \xrightarrow{\pi} x$, il existe j tel que $x \in A_j$, et alors $\{x\} \cup A_j = A_j \in F$, ce qui montre qu'on a une famille finalisante.

Supposons que $(A_j)_{j \in J}$ soit un recouvrement fermé et localement fini. Etant donné $F \xrightarrow{\pi} x$, soit $B \in F$, $j_1, \dots, j_n \in J$ tels que $B \cap A_{j_i} = \emptyset \quad \forall i \neq j_1, \dots, j_n$. Soit $J_1 = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} / x \in A_{j_i}\}$, $J_2 = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} / x \notin A_{j_i}\}$. Pour chaque $i \in J_2$, $x \in E - A_{j_i}$ qui est ouvert, donc $E - A_{j_i} \in F$, et en posant $B' = B \cap (\bigcap_{i \in J_2} (E - A_{j_i}))$, on voit encore que $B' \in F$, et $B' \cap A_{j_i} = \emptyset$ pour tout j différent de tous les j_i , $i \in J_1$. On obtient maintenant

$$B' = B' \cap E = B' \cap (\bigcup_{j \in J} A_j) = \bigcup_{j \in J} (B' \cap A_j) = \bigcup_{i \in J_1} (B' \cap A_{j_i}) = B' \cap (\bigcup_{i \in J_1} A_{j_i}),$$

d'où $B' \subset \bigcup_{i \in J_1} A_{j_i}$, $\bigcup_{i \in J_1} A_{j_i} \in F$, $\{x\} \cup (\bigcup_{i \in J_1} A_{j_i}) \in F$, ce qui montre que $(A_j)_{j \in J}$ est une famille finalisante.

7.8 Proposition. Soient (E, π) un espace quasi-topologique, $(A_j)_{j \in J}$ une famille de sous-ensembles, soit $\pi_j = \pi|_{A_j}$ et $\iota_j: A_j \rightarrow E$ les inclusions. Alors la famille $(A_j)_{j \in J}$ est finalisante si, et seulement si, π est la quasi-topologie finale sur E déterminée par les π_j et les $\iota_j: A_j \rightarrow E$.

Démonstration: Supposons que la famille est finalisante. Si π' est la quasi-topologie finale sur E , le fait que les $\iota_j: (A_j, \pi_j) \rightarrow (E, \pi)$ sont continues entraîne que $\iota_E: (E, \pi') \rightarrow (E, \pi)$ est continue. Réciproquement, pour voir que $\iota_E: (E, \pi) \rightarrow (E, \pi')$ est continue, soit $F \xrightarrow{\pi} x$, soient $j_1, \dots, j_n \in J$ avec $x \in A_{j_1}$ et $\{x\} \cup A_{j_1} \cup \dots \cup A_{j_n} \in F$; alors $F/A_{j_i} \xrightarrow{\pi_{j_i}} x$ et $F \supset x^E \cap_{j_1} (F/A_{j_1}) \cap \dots \cap_{j_n} (F/A_{j_n})$; car, si $B_1, \dots, B_n \in F$, $B \in x^E$, on a

$$B \cup (B_1 \cap A_{j_1}) \cup \dots \cup (B_n \cap A_{j_n}) \supset B_1 \cap \dots \cap B_n \cap (A_{j_1} \cup \dots \cup A_{j_n} \cup \{x\}) \in F,$$

donc $B \cup (B_1 \cap A_{j_1}) \cup \dots \cup (B_n \cap A_{j_n}) \in F$; il s'ensuit que $F \xrightarrow{\pi'} x$.

Supposons, réciproquement, que π est la quasi-topologie finale. Si $F \xrightarrow{\pi} x$, on sait qu'il existe $F_1 \xrightarrow{\pi_{j_1}} x, \dots, F_n \xrightarrow{\pi_{j_n}} x$ ($n \geq 0$) avec $F \supset x^E \cap_{j_1} (F_1) \cap \dots \cap_{j_n} (F_n)$, et alors $x \in A_{j_i}$ et $\{x\} \cup A_{j_1} \cup \dots \cup A_{j_n} \in x^E \cap_{j_1} (F_1) \cap \dots \cap_{j_n} (F_n) \subset F$, ce qui montre que la famille est finalisante.

8. Le recollement de quasi-topologies

Soit un ensemble E et soient les sous-ensembles $E_i \subset E$, chacun muni d'une quasi-topologie π_i . On peut se demander s'il existe sur E une quasi-topologie π qui induise sur chaque E_i la quasi-topologie π_i . Une condition nécessaire pour que ceci soit possible est que, pour chaque couple d'indices i, j , les quasi-topologies induites sur $E_i \cap E_j$ par π_i et π_j soient les mêmes, car chacune d'entre elles doit être la quasi-topologie induite sur $E_i \cap E_j$ par π . On va voir que cette condition est aussi suffisante:

8.1 Proposition. Soit E un ensemble, soient les sous-ensembles $E_i \subset E$ et les quasi-topologies π_i sur E_i telles qu'il existe une quasi-topologie π sur E avec $\pi_i = \pi|_{E_i}$. Si π' est la quasi-topologie finale sur E déterminée par les π_i et les inclusions $\iota_i: E_i \rightarrow E$, alors $\pi_i = \pi'|_{E_i}$.

Démonstration: Soit $\pi'_i = \pi'|_{E_i}$. Comme ι_i est continue de π_i dans π , ι_E est continue de π' dans π , donc ι_{E_i} est continue de π'_i dans π_i . D'autre part, puisque ι_i est continue de π_i dans π' , ι_{E_i} est continue de π_i dans π'_i . Ceci montre que $\pi_i = \pi'_i$.

8.2 Proposition. Soit E un ensemble, soient les sous-ensembles $E_i \subset E$, munis des quasi-topologies π_i , et supposons que, pour chaque couple d'indices i, j , $\pi_i|_{E_i \cap E_j} = \pi_j|_{E_i \cap E_j}$. Soit π sur E la quasi-topologie finale définie par les π_i et les inclusions $\iota_i: E_i \rightarrow E$. Alors, $\pi_i = \pi|_{E_i}$.

Démonstration: Comme ι_i est continue de π_i dans π , on sait que, si $F \xrightarrow{\pi_i} x$, alors $\iota_i(F) \xrightarrow{\pi} x$. Soit F un filtre sur E_i tel que $\iota_i(F) \xrightarrow{\pi} x \in E_i$; on doit voir que $F \xrightarrow{\pi_i} x$. D'après la caractérisation de la quasi-topologie finale, on sait qu'il existe

$$F_1 \xrightarrow{\pi_{i_1}} x \in E_{i_1}, \dots, F_n \xrightarrow{\pi_{i_n}} x \in E_{i_n},$$

tels que

$$\iota_i(F) \supset \iota_{i_1}(F_1) \cap \dots \cap \iota_{i_n}(F_n) \cap x^\varepsilon.$$

Alors $F_\alpha|_{E_i \cap E_{i_\alpha}} \rightarrow x$ dans $\pi_i|_{E_i \cap E_{i_\alpha}} = \pi_{i_\alpha}|_{E_i \cap E_{i_\alpha}}$, donc, notant

$\iota_{i, i_\alpha}: E_i \cap E_{i_\alpha} \rightarrow E_{i_\alpha}$ l'inclusion, $\iota_{i, i_\alpha}(F_\alpha|_{E_i \cap E_{i_\alpha}}) \rightarrow x$ dans π_{i_α} ;

pour voir que $F \xrightarrow{\pi_i} x$, il nous suffit de montrer que

$$F \supset \iota_{i, i_1}(F_1|_{E_i \cap E_{i_1}}) \cap \dots \cap \iota_{i, i_n}(F_n|_{E_i \cap E_{i_n}}) \cap x^\varepsilon.$$

Or, si $A_1 \in F_1, \dots, A_n \in F_n$, il existe $A \in F$ tel que

$A \subset A_1 \cup \dots \cup A_n \cup \{x\}$; donc, puisque $A \subset E_i$ et $A_\alpha \subset E_{i_\alpha}$,

$$A \subset E_i \cap (A_1 \cup \dots \cup A_n \cup \{x\}) = (A_1 \cap E_i \cap E_{i_1}) \cup \dots \cup (A_n \cap E_i \cap E_{i_n}) \cup \{x\},$$

d'où le résultat.

8.3 Définition. On dit que les quasi-topologies π_i sur les sous-ensembles $E_i \subset E$ se raccordent si, pour chaque couple i, j d'indices, $\pi_i|_{E_i \cap E_j} = \pi_j|_{E_i \cap E_j}$. On dit alors que la quasi-topologie finale π sur E , définie par les π_i et les inclusions $\iota_i: E_i \rightarrow E$, est le recollement des quasi-topologies π_i .

8.4 Définition. On dit que les quasi-topologies π_i sur les sous-ensembles $E_i \subset E$ se raccordent strictement si $E = \bigcup E_i$ et si, pour chaque couple d'indices i, j , $\pi_i|_{E_i \cap E_j} = \pi_j|_{E_i \cap E_j}$ et $E_i \cap E_j$ est ouvert dans π_i et π_j .

8.5 Proposition. Si les quasi-topologies π_i sur les sous-ensembles $E_i \subset E$ se raccordent strictement, alors le recollement sur E est la seule quasi-topologie π sur E telle que $\pi_i = \pi|_{E_i}$ et que E_i soit ouvert dans π .

Démonstration: Si π est le recollement, on sait déjà que $\pi_i = \pi|_{E_i}$ et le fait que E_i est ouvert dans π résulte de ce que chaque $E_i \cap E_j = \iota_j^{-1}(E_i)$ est ouvert dans π_j , et de la proposition 2.4. Réciproquement si π est une quasi-topologie sur E telle que $\pi_i = \pi|_{E_i}$ et que E_i soit ouvert dans π , il résulte des propositions 7.7 et 7.8 que π est la quasi-topologie recollement.

8.6 Corollaire. Si les quasi-topologies π_i sur les $E_i \subset E$ se raccordent strictement et sont des topologies, alors le recollement π sur E est aussi une topologie.

Démonstration: En effet, on sait, d'après la théorie des espaces topologiques, qu'il existe une topologie π sur E telle que $\pi_i = \pi|_{E_i}$ et que chaque E_i soit un ouvert de π .

8.7 Proposition. Soient les espaces quasi-topologiques (E_i, π_i) et l'espace quasi-topologique somme (E, π) avec les injections $q_i: E_i \rightarrow E$. Alors, pour chaque i , $q_i(E_i)$ est ouvert dans π et π_i est la quasi-topologie initiale définie par π et $q_i: E_i \rightarrow E$. Si chaque π_i est une topologie, alors π est une topologie.

Démonstration: On peut déjà supposer que les E_i sont disjoints,

que $E = \bigcup E_i$ et que $q_i: E_i \rightarrow E$ sont les inclusions. Il est alors trivial que les quasi-topologies π_i se raccordent strictement et on peut considérer leur recollement π sur E . Compte tenu de 8.5, E_i est ouvert dans π et $\pi_i = \pi|_{E_i}$. D'autre part π est précisément la quasi-topologie somme. Enfin, si les π_i sont des topologies, on sait, d'après 8.6, que π est une topologie.

9. Espaces quasi-topologiques connexes et localement connexes

9.1 Définition. Un espace quasi-topologique (E, π) est dit *connexe* si la topologie associée T_π est connexe. Si (E, π) est un espace quasi-topologique et $A \subseteq E$, A est dit *connexe dans π* si $(A, \pi|_A)$ est un espace quasi-topologique connexe.

Il est clair que, si (E, π) est un espace topologique, la définition antérieure donne les notions connues d'espace connexe et d'ensemble connexe, mais on se gardera de croire que A est connexe dans (E, π) si, et seulement si, il est connexe dans (E, T_π) (ceci à cause du fait que $(T_\pi)|_A$ et $T_{(\pi|_A)}$ ne sont pas identiques).

9.2 Proposition. Si $f: (E, \pi) \rightarrow (E', \pi')$ est continue et si A est un ensemble connexe de π , alors $f(A)$ est un ensemble connexe dans π' .

Démonstration: On a une restriction surjective

$$f|_A: (A, \pi|_A) \rightarrow (f(A), \pi'|_{f(A)})$$

qui est continue, donc aussi continue pour les topologies associées.

Le fait que $T_{(\pi|_A)}$ est une topologie connexe entraîne que $T_{(\pi'|_{f(A)})}$ est une topologie connexe.

9.3 Corollaire. Si (E, π) est un espace quasi-topologique de topologie associée T_π , et si $A \subseteq E$ est connexe dans π , alors A est aussi connexe dans T_π .

Démonstration: Il suffit d'appliquer 9.2 à l'application continue $1_E: (E, \pi) \rightarrow (E, T_\pi)$.

9.4 Proposition. Si (E, π) est un espace quasi-topologique de

topologie associée T_π et si $A \subset E$ est ouvert ou fermé, alors A est connexe dans π si, et seulement si, A est connexe dans T_π .

Démonstration: Il suffit de remarquer que, d'après la proposition 2.7, $T_{(\pi/A)} = (T_\pi)/A$.

9.5 Lemme. Si (E, π) est un espace quasi-topologique et si les ensembles $A_i \subset E$ sont connexes dans π , avec $\cap A_i \neq \emptyset$, alors $\cup A_i$ est connexe dans π .

Démonstration: Supposons B ouvert et fermé dans $\pi/\cup A_i$, avec $B \neq \emptyset$. Il existe i_0 avec $B \cap A_{i_0} \neq \emptyset$ et, parce que $\iota: \pi/A_{i_0} \rightarrow \pi/\cup A_i$ est continue, donc aussi continue pour les topologies associées, on obtient $B \cap A_{i_0} = \iota^{-1}(B)$ ouvert et fermé dans π/A_{i_0} , d'où $B \cap A_{i_0} = A_{i_0}$, c'est-à-dire $B \supset A_{i_0}$. Mais alors, pour tout i , $B \cap A_i \neq \emptyset$ et le même raisonnement montre que $B \supset A_i$, $B \supset \cup A_i$, $B = \cup A_i$.

9.6 Proposition. Si (E, π) est un espace quasi-topologique et si les ensembles $A_i \subset E$ sont connexes dans π et tels qu'il existe i_0 avec $A_{i_0} \cap A_i \neq \emptyset \forall i$, alors $\cup A_i$ est connexe dans π .

Démonstration: Il suffit d'appliquer le lemme antérieur deux fois, une première pour voir que chaque $A_i \cup A_{i_0}$ est connexe, et une deuxième pour voir que $\cup A_i = \cup (A_i \cup A_{i_0})$ est connexe.

Si (E, π) est un espace quasi-topologique et $A \subset E$, on peut définir une demi-fermeture $\bar{A}$ de A comme étant l'ensemble des $x \in E$ tels qu'il existe un filtre propre F sur A avec $\iota(F) \xrightarrow{\pi} x$. Alors $A \subset \bar{A}$ et, si B est un fermé de π avec $A \subset B$, on voit aussi que $\bar{A} \subset B$. A est fermé dans π si, et seulement si, $A = \bar{A}$. Cependant $\bar{A}$ n'est pas obligatoirement fermé, c'est-à-dire, on peut ne pas avoir $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

9.7 Proposition. Si (E, π) est un espace quasi-topologique, A un connexe de π et $A \subset B \subset \bar{A}$, alors B est connexe dans π .

Démonstration: Supposons $B = B_1 \cup B_2$ avec $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, B_1 et B_2 ouverts dans π/B . On obtient $A = B \cap A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A)$ avec

$(B_1 \cap A) \cap (B_2 \cap A) = \emptyset$ et les $B_i \cap A$ ouverts dans π/A (car $\iota: \pi/A \rightarrow \pi/B$ est continue), ce qui entraîne que, par exemple $B_1 \cap A = \emptyset$. Si $B_1 \neq \emptyset$ on pourrait choisir $b_1 \in B_1$ et, comme $b_1 \in \tilde{A}$, il existerait un filtre propre F dans A avec $\iota(F) \xrightarrow{\pi} b_1$ ($\iota: A \rightarrow E$), donc

$$\iota'(F) = \iota(F)_{/B} \xrightarrow{\pi/B} b_1 \quad (\iota': A \rightarrow B);$$

B_1 étant ouvert dans π/B , il en résulterait $B_1 \in \iota'(F)$, ce qui entraînerait l'existence de $C \in F$ avec $C \subset B_1$, d'où $C \subset A \cap B_1 = \emptyset$; ceci est absurde, F étant propre. Donc $B_1 = \emptyset$, ce qui montre que B est connexe dans π .

9.8 Proposition. *Si l'espace quasi-topologique (E, π) est le produit des espaces quasi-topologiques connexes (E_i, π_i) , alors (E, π) est connexe.*

Démonstration: Nous pouvons déjà écarter les deux cas triviaux où l'ensemble des indices est vide et où il existe i avec $E_i = \emptyset$. Fixons donc $e = (e_i) \in E$. Définissons, pour chaque entier $n \geq 0$, l'ensemble

$C_n = \{(x_i) \in E \mid x_i = e_i \text{ sauf pour un nombre maximum de } n \text{ indices}\}$.

Si on désigne, pour chaque $x = (x_i) \in C_n$ et chaque indice i_0 , par

$\xi_{x, i_0}: E_{i_0} \rightarrow E$ l'application continue définie par $y_{i_0} \rightsquigarrow (y_i)$ avec

$y_i = x_i$ pour $i \neq i_0$, on voit que $\xi_{x, i_0}(E_{i_0})$ est connexe dans π

et $C_{n+1} = C_n \cup (\bigcup_{x \in C_n} \xi_{x, i_0}(E_{i_0}))$; il en résulte que, si C_n est connexe,

C_{n+1} est aussi connexe (proposition 9.6, car $x \in C_n \cap \xi_{x, i_0}(E_{i_0})$ pour $x \in C_n$). En tenant compte du fait que $C_0 = \{(e_i)\}$ est connexe, on

voit par induction que tout C_n est connexe, et, en posant $C = \bigcup_n C_n$,

C est aussi connexe dans π . En tenant compte de la proposition 9.7,

notre proposition sera démontrée si l'on prouve que $\tilde{C} = E$. Or, soit

$x = (x_i) \in E$; pour chaque i , $x_i \xrightarrow{\pi_i} e_i$; si $F = \prod x_i^e$ (c'est le

filtre qui admet pour base les $\prod A_i$ avec $x_i \in A_i$ et $A_i = E_i$ sauf

pour un nombre fini d'indices), on a $F \xrightarrow{\pi} x$. Mais F/C est un fil-

tre propre et $\iota(F/C) \supset F$, donc $\iota(F/C) \xrightarrow{\pi} x$, ce qui entraîne que $x \in \tilde{C}$.

Comme dans le cas des espaces topologiques, on dit que deux points a, b de l'espace quasi-topologique (E, π) sont *connexes dans π* s'il existe un ensemble connexe dans π qui les contient. La relation " a et

b sont connexes dans π " est une relation d'équivalence dans E et les classes d'équivalence définies par cette relation sont appelées *composantes connexes* de (E, π) . Ce sont des ensembles connexes dans (E, π) qui contiennent tout ensemble connexe dans (E, π) qui les rencontre.

9.9 Proposition. *Si A est une composante connexe de (E, π) , alors A est fermé dans π .*

Démonstration: A étant connexe dans (E, π) , d'après 9.7, $\bar{A}$ est connexe dans π ; comme $A \subset \bar{A}$, en particulier $A \cap \bar{A} \neq \emptyset$, on a $\bar{A} \subset A$. Il s'ensuit $\bar{A} = A$, c'est-à-dire A est fermé dans π .

9.10 Proposition. *Si A est connexe dans l'espace quasi-topologique (E, π) et si $\bar{A}$ est la fermeture de A pour la topologie T_π associée, alors $\bar{A}$ est connexe dans π .*

Démonstration: On peut déjà supposer A non vide. Soit B une composante connexe de π/A qui rencontre A . A étant connexe dans π , donc dans π/A , on a $A \subset B$. Mais, d'après la proposition antérieure, B est fermé dans π/A , c'est-à-dire dans $T_{(\pi/A)}$ qui, d'après 2.7, est précisément $(T_\pi)/A$; donc B est aussi fermé dans T_π , ce qui entraîne $\bar{A} \subset B$, d'où $\bar{A} = B$; ainsi A est un connexe de π/A , et a fortiori de π .

9.11 Définition. Un espace quasi-topologique (E, π) est dit *localement connexe* si, pour tout $F \xrightarrow{\pi} x$, il existe $F' \xrightarrow{\pi} x$ avec $F \supset F'$ et F' ayant une base formée par des connexes de π .

Si (E, π) est un espace topologique, cette définition coïncide avec celle déjà connue, laquelle exige que chaque filtre de voisinages ait une base **formée** par des connexes.

9.12 Proposition. *Si (E, π) est un espace quasi-topologique localement connexe et si A est un ouvert de π , alors chaque composante connexe A_i de $(A, \pi/A)$ est ouverte dans π .*

Démonstration: Soit $x \in A_i$ et $F \xrightarrow{\pi} x$. Alors $F \cap x^\varepsilon \xrightarrow{\pi} x$ et il existe $F' \xrightarrow{\pi} x$ avec $F' \subset F \cap x^\varepsilon$, F' ayant une base formée par des connexes de π . Comme A est ouvert et $x \in A$, on a $A \in F'$, et il

existe $B \in F'$ avec $B \subset A$ et B connexe dans π , et par suite connexe dans π/A . Alors $B \cap A_1 \neq \emptyset$, car $x \in B \cap A_1$ (puisque $F' \subset x^E$), donc $B \subset A_1$, d'où $A_1 \in F' \subset F$, ce qui montre que A_1 est ouvert dans π .

On sait que, réciproquement, un espace topologique tel que les composantes connexes de tout ouvert soient ouvertes est localement connexe, mais ceci ne paraît pas être vrai pour les espaces quasi-topologiques.

9.13 Proposition. *Si (E, π) est un espace quasi-topologique localement connexe et si A est un ouvert de π , alors $(A, \pi/A)$ est localement connexe.*

Démonstration: Si $F \xrightarrow{\pi/A} x$, alors $\iota(F) \xrightarrow{\pi} x$ et il existe $F' \subset \iota(F)$, avec $F' \xrightarrow{\pi} x$, F' ayant une base formée par des connexes de π . Comme $A \in F'$, F' admet une base formée par les connexes appartenant à F' et contenus dans A , et ceux-ci seront connexes dans π/A . Par suite $F'/A \xrightarrow{\pi/A} x$ avec $F'/A \subset \iota(F)/A = F$, ce qui termine la démonstration.

9.14 Proposition. *Si (E, π) est un espace quasi-topologique localement connexe, alors la topologie T_π associée est aussi localement connexe.*

Démonstration: Soit $x \in E$, soit A un ouvert de T_π avec $x \in A$. Soit B la composante connexe de π/A qui contient x . D'après 9.12, B est ouvert dans T_π et B , étant connexe dans π/A , sera connexe dans π , donc dans T_π (9.3); ce qui montre que x dans T_π admet un système fondamental de voisinages connexes, c'est-à-dire T_π est localement connexe.

9.15 Proposition. *Si (E, π) est un espace quasi-topologique dont la topologie T_π associée est localement connexe, alors les composantes connexes de π et de T_π coïncident.*

Démonstration: Soit A une composante connexe de π et B la composante connexe de T_π avec $A \cap B \neq \emptyset$. A étant connexe dans π , donc dans T_π , $A \subset B$ et, comme B est ouvert dans T_π , B , étant connexe dans T_π , sera connexe dans π , d'où $B \subset A$, ce qui entraîne finalement que $A = B$.

9.16 Proposition. *Etant donné les espaces quasi-topologiques (E_i, π_i) de produit (E, π) , alors, si les (E_i, π_i) sont localement connexes et, sauf pour un nombre fini d'indices, connexes, (E, π) est aussi localement connexe.*

Démonstration: Soit $F \xrightarrow{\pi} x = (x_i)$; on a $F \supset \Pi F_i$ avec $F_i \xrightarrow{\pi_i} x_i$ et il existe $F'_i \xrightarrow{\pi_i} x_i$ avec $F'_i \subset F_i$; F'_i ayant une base formée par des connexes de π_i . On a $\Pi F'_i \xrightarrow{\pi} x$, $\Pi F'_i \subset F$; montrons que $\Pi F'_i$ a une base formée par des connexes de π . Si $A \in \Pi F'_i$, alors $A \supset \Pi A_i$, $A_i \in F'_i$ (et, sauf pour un nombre fini d'indices, $A_i = E_i$), et on peut choisir $A'_i \in F'_i$ avec $A'_i \subset A_i$ et A'_i connexe dans π_i ; choisissons en particulier $A'_i = E_i$ si $A_i = E_i$ et π_i connexe. On voit que $\Pi A'_i \in \Pi F'_i$ (car, sauf pour un nombre fini d'indices, $A'_i = E_i$), $\Pi A'_i \subset A$ et $\Pi A'_i$ connexe dans π (9.8, $\pi/\Pi A'_i$ étant le produit des π_i/A'_i).

9.17 Proposition. *Soient les espaces quasi-topologiques (E_i, π_i) localement connexes, soient les applications $f_i: E_i \rightarrow E$, soit π sur E la quasi-topologie finale. Alors (E, π) est localement connexe.*

Démonstration: Soit $F \xrightarrow{\pi} x$; on sait qu'il existe des filtres F_j dans E_{i_j} ($j = 1, \dots, n$) avec $F_j \xrightarrow{\pi_{i_j}} x_j$, $f_{i_j}(x_j) = x$ et

$$F \supset x^\epsilon \cap f_{i_1}(F_1) \cap \dots \cap f_{i_n}(F_n).$$

Alors $F_j \cap x_j^\epsilon \xrightarrow{\pi_{i_j}} x_j$ et il existe $F'_j \subset F_j \cap x_j^\epsilon$ avec $F'_j \xrightarrow{\pi_{i_j}} x_j$, F'_j ayant une base formée par des connexes de π_{i_j} . On voit encore que

$$F \supset x^\epsilon \cap f_{i_1}(F'_1) \cap \dots \cap f_{i_n}(F'_n) \text{ avec } x^\epsilon \cap f_{i_1}(F'_1) \cap \dots \cap f_{i_n}(F'_n) \xrightarrow{\pi} x$$

et il nous reste seulement à montrer que ce filtre admet une base formée par des connexes de π . Or, si $A \in x^\epsilon \cap f_{i_1}(F'_1) \cap \dots \cap f_{i_n}(F'_n)$, alors $A \supset B \cup B_1 \cup \dots \cup B_n$ avec $B \in x^\epsilon$, $B_j \supset f_{i_j}(C_j)$, $C_j \in F'_j$, et on peut déjà supposer les C_j connexes dans π_{i_j} . On obtient

$$A \supset \{x\} \cup f_{i_1}(C_1) \cup \dots \cup f_{i_n}(C_n) \in x^\epsilon \cap f_{i_1}(F'_1) \cap \dots \cap f_{i_n}(F'_n)$$

et, les $f_{i_j}(C_j)$ étant connexes dans π (9.2) et contenant $\{x\}$ (qui est aussi connexe), on trouve que $\{x\} \cup f_{i_1}(C_1) \cup \dots \cup f_{i_n}(C_n)$ est connexe dans π (9.6), ce qui termine la démonstration.

10. Espaces connexes par arcs et localement connexes par arcs

10.1 Définition. Soit (E, π) un espace quasi-topologique, soit $a, b \in E$. On dit que le couple (a, b) est *connexe par arcs dans* (E, π) , et on écrit $a \underset{\pi}{\sim} b$, s'il existe une application continue $\xi: [0, 1] \rightarrow (E, \pi)$ avec $\xi(0) = a$ et $\xi(1) = b$. On dit que (E, π) est *connexe par arcs* si, $\forall a, b \in E$, $a \underset{\pi}{\sim} b$. $A \subset E$ est dit *connexe par arcs dans* π si $(A, \pi|_A)$ est connexe par arcs.

10.2 Proposition. La relation $a \underset{\pi}{\sim} b$ est une relation d'équivalence sur E .

Démonstration: Pour voir que $a \underset{\pi}{\sim} a$, il suffit de prendre pour $\xi: [0, 1] \rightarrow E$ l'application de valeur constante a . Si $a \underset{\pi}{\sim} b$ et si $\xi: [0, 1] \rightarrow E$ avec $\xi(0) = a$ et $\xi(1) = b$, on peut considérer $\xi': [0, 1] \rightarrow E$, $\xi'(t) = \xi(1-t)$, et alors $\xi'(0) = b$, $\xi'(1) = a$, ce qui montre que $b \underset{\pi}{\sim} a$. Si $a \underset{\pi}{\sim} b$ et $b \underset{\pi}{\sim} c$, il existe $\xi: [0, 1] \rightarrow E$, $\xi': [0, 1] \rightarrow E$ avec $\xi(0) = a$, $\xi(1) = \xi'(0) = b$, $\xi'(1) = c$, et on peut définir $\xi'': [0, 1] \rightarrow E$ par

$$\xi''(t) = \begin{cases} \xi(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \xi'(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

(ξ'' est continue, en tenant compte des propositions 7.7 et 7.8), ce qui nous donne $\xi''(0) = a$, $\xi''(1) = c$, donc $a \underset{\pi}{\sim} c$.

10.3 Définition. Etant donné l'espace quasi-topologique (E, π) , on appelle *composantes connexes par arcs de* (E, π) les classes d'équivalence pour la relation $\underset{\pi}{\sim}$ sur E .

Comme dans le cas topologique, on voit que les composantes connexes par arcs de (E, π) sont connexes par arcs, et contiennent tout sous-ensemble connexe par arcs de (E, π) qui les rencontre. On voit aussi que, si $a \underset{\pi}{\sim} b$, alors a et b sont aussi connexes dans (E, π) ; en particulier, tout espace quasi-topologique connexe par arcs est connexe. Donnons un exemple d'espace quasi-topologique connexe par arcs:

On appelle *espace vectoriel quasi-topologique* un couple (E, π) où E est un espace vectoriel et π une quasi-topologie sur E telle que les applications $+: \pi \times \pi \rightarrow \pi$ et $\times: R \times \pi \rightarrow \pi$ soient continues. Dans un

tel espace, tout ensemble convexe A (et, plus généralement tout ensemble étoilé) est connexe par arcs.

10.4 Définition. Un espace quasi-topologique (E, π) est dit *localement connexe par arcs* si, pour tout $F \xrightarrow{\pi} x$, il existe $F' \xrightarrow{\pi} x$ avec $F' \subset F$, F' ayant une base formée par des ensembles connexes par arcs.

Il est clair que, dans le cas où (E, π) est un espace topologique, cette définition est équivalente à affirmer que chaque filtre des voisinages admet une base formée par des ensembles connexes par arcs. Il est aussi clair que, si (E, π) est localement connexe par arcs, il est localement connexe.

10.5 Proposition. Si (E, π) est localement connexe par arcs et si A est un ouvert de π , alors $(A, \pi/A)$ est localement connexe par arcs.

Démonstration: Etant donné $x \in A$ et $F \xrightarrow{\pi/A} x$, on a $\iota(F) \xrightarrow{\pi} x$ et il existe $F' \xrightarrow{\pi} x$, avec $F' \subset F$, F' ayant une base formée par des ensembles connexes par arcs. Comme A est ouvert, $A \in F'$, ce qui entraîne que F'/A admet une base formée par des connexes par arcs (à savoir, les connexes par arcs appartenant à F' qui sont contenus dans A) ; on voit que $F'/A \xrightarrow{\pi/A} x$ et $F = \iota(F)/A \supset F'/A$, d'où le résultat.

10.6 Proposition. Si (E, π) est un espace quasi-topologique localement connexe par arcs et si A est ouvert dans π , alors les composantes connexes par arcs A_i de $(A, \pi/A)$ sont ouvertes dans π .

Démonstration: Si $F \xrightarrow{\pi} x \in A_i$, alors $F \cap x^E \xrightarrow{\pi} x$ et il existe $F' \xrightarrow{\pi} x$, $F' \subset F \cap x^E$, F' ayant une base formée par des ensembles connexes par arcs. On a $A \in F'$ et il existe $B \in F'$, $B \subset A$, B connexe par arcs; puisque $x \in B \cap A_i$, on voit que $B \cup A_i$ est connexe par arcs dans π , donc dans π/A , ce qui entraîne $B \cup A_i \subset A_i$; donc $B \cup A_i = A_i$, c'est-à-dire $B \subset A_i$, $A_i \in F' \subset F$. Il s'ensuit que A_i est ouvert dans π .

Dans le cas des espaces topologiques on a la réciproque: Si les composantes connexes par arcs de tout ouvert sont des ouverts, alors

l'espace topologique est localement connexe par arcs.

10.7 Proposition. *Si l'espace quasi-topologique (E, π) est connexe et localement connexe par arcs, alors il est connexe par arcs.*

Démonstration: On peut déjà supposer $E \neq \emptyset$. D'après la proposition antérieure on sait que les composantes connexes par arcs A_i de (E, π) sont ouvertes dans π et il en découle, i_0 étant un indice fixé, que $E = A_{i_0} \cup (\bigcup_{i \neq i_0} A_i)$, avec $A_{i_0} \cap (\bigcup_{i \neq i_0} A_i) = \emptyset$, A_{i_0} et $\bigcup_{i \neq i_0} A_i$ ouverts dans π , ce qui, d'après la connexion de (E, π) , entraîne $\bigcup_{i \neq i_0} A_i = \emptyset$, donc $A_{i_0} = E$; c'est-à-dire E est connexe par arcs.

10.8 Proposition. *Si (E, π) est un espace quasi-topologique localement connexe par arcs, alors ses composantes connexes et connexes par arcs coïncident.*

Démonstration: Soit A une composante connexe par arcs et B une composante connexe avec $A \cap B \neq \emptyset$; comme A est connexe, $A \subset B$ et, B étant ouvert dans π ((E, π) est aussi localement connexe), $(E, \pi/B)$ est localement connexe par arcs; donc, d'après la proposition antérieure, B est connexe par arcs, ce qui entraîne $B \subset A$, c'est-à-dire $A = B$.

Comme dans le cas des espaces topologiques, on voit que le produit d'espaces quasi-topologiques connexes par arcs est connexe par arcs et que, si $f: (E, \pi) \rightarrow (E', \pi')$ est continue et $a \sim_{\pi} b$, alors $f(a) \sim_{\pi'} f(b)$ (en particulier, si f est surjective et π connexe par arcs, π' est connexe par arcs).

Avec des démonstrations identiques à celles des propositions 9.14, 9.16 et 9.17, on obtient:

10.9 Proposition. *Si (E, π) est un espace quasi-topologique localement connexe par arcs, alors la topologie T_{π} associée est localement connexe par arcs.*

10.10 Proposition. *Etant donné les espaces quasi-topologiques (E_i, π_i) , de produit (E, π) , alors, si les (E_i, π_i) sont localement connexes par arcs et, sauf pour un nombre fini d'indices, connexes, (E, π) est aussi localement connexe par arcs.*

10.11 Proposition. Soient les espaces quasi-topologiques (E_i, π_i) localement connexes par arcs, soient les applications $f_i: E_i \rightarrow E$, soit π sur E la quasi-topologie finale. Alors (E, π) est localement connexe par arcs.

On va terminer ce paragraphe en présentant quelques exemples d'espaces localement connexes par arcs. Un espace vectoriel quasi-topologique (E, π) est dit *quasi-localement convexe* si, quel que soit $F \xrightarrow{\pi} a$, il existe $F' \xrightarrow{\pi} a$, $F' \subset F$, F' ayant une base formée par des ensembles convexes. Dans le cas des espaces vectoriels topologiques, cette définition se réduit à celle qui affirme que chaque filtre de voisinages a une base formée par des ensembles convexes.

10.12 Proposition. Si (E, π) est un espace vectoriel quasi-topologique, quasi-localement convexe, et si $A \subset E$ est un ensemble convexe, alors (A, π_A) est localement connexe par arcs.

Démonstration: Si $a \in A$ et $F \xrightarrow{\pi_A} a$, alors $\iota(F) \xrightarrow{\pi} a$, et il existe $F' \subset \iota(F)$ avec $F' \xrightarrow{\pi} a$, F' ayant une base formée par des convexes. On a $F'/A \xrightarrow{\pi_A} a$, et F'/A a une base formée par des convexes (l'intersection de deux convexes est un convexe), lesquels sont aussi connexes par arcs.

Un filtre F dans un espace vectoriel E est dit *étoilé* (équable dans [10]) si $V \in F$ (où V est le filtre des voisinages de 0 dans E), ce qui est équivalent à dire que F admet une base formée par des ensembles équilibrés et que

$$A \in F \text{ et } \lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda A \in F.$$

Un espace vectoriel quasi-topologique (E, π) est dit *étoilé* si, pour tout $F \xrightarrow{\pi} 0$, il existe $F' \xrightarrow{\pi} 0$ avec F' étoilé et $F' \subset F$. Tout espace vectoriel topologique est étoilé, ce qui résulte du fait que le filtre des voisinages de 0 est étoilé.

10.13 Proposition. Si (E, π) est un espace vectoriel quasi-topologique étoilé, alors π est localement connexe par arcs.

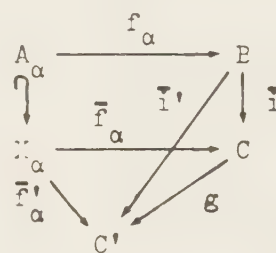
Démonstration: En tenant compte du fait que les translations sont des homéomorphismes, il nous suffit de montrer que, si $F \xrightarrow{\pi} 0$,

il existe $F' \xrightarrow{\pi} 0$ avec $F' \subset F$, F' ayant une base formée par des ensembles connexes par arcs. Or, soit F' un filtre étoilé avec $F' \xrightarrow{\pi} 0$ et $F' \subset F$. Si $A \in F'$, il existe $B \in F'$ avec $B \subset A$ et B équilibré, et l'on voit que, pour chaque $a \in B$, il existe une application continue $\xi: [0,1] \rightarrow B$, $t \mapsto \xi(t)$, avec $\xi(0) = 0$, $\xi(1) = a$, ce qui montre que $0 \sim_{\pi/B} a$; π/B est donc connexe par arcs.

11. Le collage d'espaces quasi-topologiques

Etant donné l'ensemble $\underline{B}$, les ensembles $\underline{X}_\alpha$, les sous-ensembles $\underline{A}_\alpha \subset \underline{X}_\alpha$ et les applications $f_\alpha: \underline{A}_\alpha \rightarrow \underline{B}$, intuitivement le collage des ensembles $\underline{X}_\alpha$ à $\underline{B}$ au moyen des f_α est l'ensemble qu'on obtient en prenant les points des $\underline{X}_\alpha$ et les points de $\underline{B}$ et identifiant chaque $a_\alpha \in \underline{A}_\alpha$ à $f_\alpha(a_\alpha) \in \underline{B}$. Si $\underline{C}$ est cet ensemble, il existe des applications canoniques $\bar{i}: \underline{B} \rightarrow \underline{C}$, $\bar{f}_\alpha: \underline{X}_\alpha \rightarrow \underline{C}$.

D'une façon plus explicite, on dit que l'ensemble $\underline{C}$ est un collage des $\underline{X}_\alpha$ à $\underline{B}$, au moyen des $f_\alpha: \underline{A}_\alpha \rightarrow \underline{B}$, les applications canoniques étant $\bar{i}: \underline{B} \rightarrow \underline{C}$, $\bar{f}_\alpha: \underline{X}_\alpha \rightarrow \underline{C}$, si, pour chaque $a_\alpha \in \underline{A}_\alpha$, on a $\bar{i}(f_\alpha(a_\alpha)) = \bar{f}_\alpha(a_\alpha)$ et si, quels que soient l'ensemble $\underline{C}'$ et les



applications $\bar{f}'_\alpha: \underline{X}_\alpha \rightarrow \underline{C}'$ et $\bar{i}': \underline{B} \rightarrow \underline{C}'$ avec $\bar{i}'(f_\alpha(a_\alpha)) = \bar{f}'_\alpha(a_\alpha)$, il existe une, et une seule, application $g: \underline{C} \rightarrow \underline{C}'$ telle que $g \circ \bar{i} = \bar{i}'$ et $g \circ \bar{f}_\alpha = \bar{f}'_\alpha$. Ceci équivaut à dire que $\underline{C}$ est une limite inductive d'un certain foncteur (évident); $\underline{C}$ est donc défini à un isomorphisme près.

En particulier on peut prendre pour $\underline{C}$ la réunion disjointe de $\underline{B}$ et des $\underline{X}_\alpha - \underline{A}_\alpha$, pour $\bar{i}: \underline{B} \rightarrow \underline{C}$ l'inclusion canonique et pour $\bar{f}_\alpha: \underline{X}_\alpha \rightarrow \underline{C}$ l'application qui est l'inclusion dans $\underline{X}_\alpha - \underline{A}_\alpha$ et coïncide avec f_α dans $\underline{A}_\alpha$. Quand on fait cette construction particulière, on note l'ensemble $\underline{C}$ par $\underline{B} \sqcup_{\bar{f}} (\underline{X}_\alpha)$, ou par $\underline{B} \sqcup (\underline{X}_\alpha)$ s'il n'y a pas danger de confusion. La notation $\underline{B} \sqcup_{\bar{f}} \underline{X}_1 \sqcup \dots \sqcup \underline{X}_n$ est aussi utilisée quand l'ensemble des indices est fini. Lorsque $\underline{B}$ et les $\underline{X}_\alpha$ sont des espaces topologiques, les ensembles sous-jacents étant $\underline{B}$ et $\underline{X}_\alpha$, on note $\underline{C}$ le collage $\underline{C}$ muni de la topologie finale définie par les applications $\bar{f}_\alpha$ et $\bar{i}$, ceci correspondant à considérer le problème universel avec "application continue" au lieu de "application". Si $\underline{C}$ est le collage canonique, on note $\underline{C}$ par $\underline{B} \sqcup (\underline{X}_\alpha)$. La théorie dans ce cadre est développée dans [14].

Dans ce paragraphe on examine le cas où les X_α et B sont des espaces quasi-topologiques et où les $f_\alpha: A_\alpha \rightarrow B$ sont continues. Si $\underline{C}$ est un collage des X_α à B , on considère sur $\underline{C}$ la quasi-topologie finale définie par les applications $\bar{f}_\alpha$ et $\bar{i}$ et on note C l'espace quasi-topologique correspondant. Ceci correspond à considérer le problème universel dans la catégorie des espaces quasi-topologiques. On dit alors que C est un collage quasi-topologique des X_α à B . Si $\underline{C}$ est le collage canonique, on note C par $B \sqcup (X_\alpha)$. Même si B et les X_α sont des espaces topologiques on peut avoir $B \sqcup (\hat{X}_\alpha) \neq B \sqcup (X_\alpha)$. Bien entendu, si $\hat{B}$ et $\hat{X}_\alpha$ sont les espaces topologiques associés à B et X_α , la topologie associée à $B \sqcup (X_\alpha)$ est la topologie finale déterminée par les applications $\bar{f}_\alpha$, $\bar{i}$ et les topologies $\hat{B}$ et $\hat{X}_\alpha$ (2.4); en particulier, dans le cas où les $f_\alpha: A_\alpha \rightarrow B$ sont continues, en considérant sur A_α la topologie induite par $\hat{X}_\alpha$ (ce qui arrive si A_α est ouvert ou fermé dans X_α - proposition 2.7) la topologie associée à $B \sqcup (X_\alpha)$ est $\hat{B} \sqcup (\hat{X}_\alpha)$.

Pour le collage canonique $B \sqcup (X_\alpha)$ ou $B \sqcup (\hat{X}_\alpha)$, on écrit, par abus de notation, $b = \bar{i}(b)$ ($b \in B$), $x_\alpha = \bar{f}_\alpha(x_\alpha)$ ($x_\alpha \in X_\alpha - A_\alpha$).

11.1 Proposition. Soient les espaces quasi-topologiques B et X_α ($\alpha \in J$), les sous-espaces fermés $A_\alpha \subset X_\alpha$ et les applications continues $f_\alpha: A_\alpha \rightarrow B$. Soit le collage quasi-topologique $B \sqcup (X_\alpha)$, les applications continues canoniques étant

$$\bar{f}_\alpha: X_\alpha \rightarrow B \sqcup (X_\alpha), \quad \bar{i}: B \rightarrow B \sqcup (X_\alpha).$$

Alors $\bar{i}$ définit un homéomorphisme de B sur un sous-espace fermé de $B \sqcup (X_\alpha)$ et $\bar{f}_\alpha|_{X_\alpha - A_\alpha}$ définit un homéomorphisme de $X_\alpha - A_\alpha$ sur un sous-espace ouvert de $B \sqcup (X_\alpha)$, où $X_\alpha - A_\alpha = X_\alpha / \underline{X}_\alpha - A_\alpha$.

Démonstration: Il suffit de voir que B et $X_\alpha - A_\alpha$ sont des sous-espaces quasi-topologiques de $B \sqcup (X_\alpha)$, le fait qu'ils soient respectivement fermé et ouverts résultant alors de la proposition correspondante pour le collage topologique appliquée à $\hat{B}$ et $\hat{X}_\alpha$ (14). En ce qui concerne B , $\bar{i}: B \rightarrow B \sqcup (X_\alpha)$ étant continue, il suffit de montrer que, si F est un filtre dans B avec $\bar{i}(F) \xrightarrow{C} b \in B$ ($C = B \sqcup (X_\alpha)$), alors $F \xrightarrow{B} b$. Or, on sait qu'il existe

$$F_1 \xrightarrow{B} b, \quad G_1 \xrightarrow{X_{\alpha_1}} a_1 \in A_{\alpha_1}, \dots, G_n \xrightarrow{X_{\alpha_n}} a_n \in A_{\alpha_n} \quad (n \geq 0)$$

avec $f_{\alpha_i}(a_i) = b$ et $\bar{i}(F) \supset \bar{i}(F_1) \cap f_{\alpha_1}(G_1) \cap \dots \cap f_{\alpha_n}(G_n)$,

et l'on voit que $G_i/A_{\alpha_i} \xrightarrow{A_{\alpha_i}} a_i$, $f_{\alpha_i}(G_i/A_{\alpha_i}) \xrightarrow{B} b$; il s'ensuit

$$F \supset F_1 \cap f_{\alpha_1}(G_1/A_{\alpha_1}) \cap \dots \cap f_{\alpha_n}(G_n/A_{\alpha_n}),$$

car, si $A_1 \in \Gamma_1$, $B_1 \in G_1, \dots, B_n \in G_n$, alors

$$A_1 \cup f_{\alpha_1}(A_{\alpha_1} \cap B_1) \cup \dots \cup f_{\alpha_n}(A_{\alpha_n} \cap B_n) \supset B \cap [A_1 \cup \bar{f}_{\alpha_1}(B_1) \cup \dots \cup \bar{f}_{\alpha_n}(B_n)] \in \bar{i}(F)/\underline{B} = F;$$

donc $F \xrightarrow{\underline{B}} b$. En ce qui concerne $X_\alpha - A_\alpha$, les $\bar{f}_{\alpha/X_\alpha - A_\alpha}: X_\alpha - A_\alpha \rightarrow B \sqcup (X_\alpha)$

étant continues, il nous suffit de voir que, si F est un filtre dans

$X_\alpha - A_\alpha$ avec $\bar{f}_{\alpha/X_\alpha - A_\alpha}(F) \xrightarrow{B \sqcup (X_\alpha)} x \in X_\alpha - A_\alpha$, alors $F \xrightarrow{X_\alpha - A_\alpha} x$. Or, il

existe $G \xrightarrow{X_\alpha} x$ avec $\bar{f}_{\alpha/X_\alpha - A_\alpha}(F) \supset \bar{f}_\alpha(G)$, et $F \supset G/X_\alpha - A_\alpha$ puisque, si

$K \in G$, on a $\bar{f}_\alpha(K) \supset \bar{f}_\alpha(L)$, $L \in F$, d'où $K \cap (X_\alpha - A_\alpha) \supset L$; donc $F \xrightarrow{X_\alpha - A_\alpha} x$.

11.2 Proposition. *Sous les conditions de la proposition antérieure, si B et les X_α sont séparés, alors $B \sqcup (X_\alpha)$ est aussi séparé.*

Démonstration: On va s'appuyer sur la

proposition 4.9.

$$a) (\bar{i} \times \bar{i})^{-1}(\Delta_{B \sqcup (X_\alpha)}) = \Delta_B \text{ est fermé}$$

dans $B \times B$, car B est séparé.

$$b) (\bar{i} \times \bar{f}_\alpha)^{-1}(\Delta_{B \sqcup (X_\alpha)}) = \{(b, x_\alpha) \in B \times X_\alpha / b = \bar{f}_\alpha(x_\alpha)\} =$$

$$= \{(b, x_\alpha) \in B \times A_\alpha / b = f_\alpha(x_\alpha)\} = (1_B \times f_\alpha)^{-1}(\Delta_B), \text{ qui est fermé}$$

dans $B \times A_\alpha$; comme $B \times A_\alpha$ est fermé dans $B \times X_\alpha$ ($B \times A_\alpha = p_2^{-1}(A_\alpha)$,

avec A_α fermé dans X_α , où $p_2: B \times X_\alpha \rightarrow X_\alpha$ est la projection qui est

continue), on voit, en tenant compte de 2.7, que $(\bar{i} \times \bar{f}_\alpha)^{-1}(\Delta_{B \sqcup (X_\alpha)})$

est fermé dans $B \times X_\alpha$.

$$c) \text{ Comme dans } b), (\bar{f}_\alpha \times \bar{i})^{-1}(\Delta_{B \sqcup (X_\alpha)}) \text{ est fermé dans } X_\alpha \times B.$$

$$d) (\bar{f}_\alpha \times \bar{f}_\beta)^{-1}(\Delta_{B \sqcup (X_\alpha)}) = \{(x_\alpha, x_\beta) \in X_\alpha \times X_\beta / \bar{f}_\alpha(x_\alpha) = \bar{f}_\beta(x_\beta)\} =$$

$$= L_1 \cup L_2, \text{ où } L_1 \text{ est vide si } \alpha \neq \beta \text{ et } L_1 = \Delta_{X_\alpha} \text{ si } \alpha = \beta \text{ (donc}$$

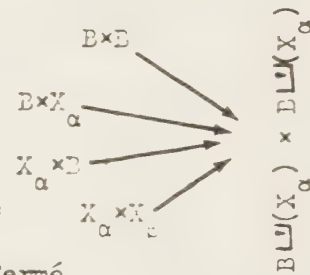
L_1 fermé dans $X_\alpha \times X_\beta$) et

$$L_2 = \{(x_\alpha, x_\beta) \in A_\alpha \times A_\beta / f_\alpha(x_\alpha) = f_\beta(x_\beta)\} = (f_\alpha \times f_\beta)^{-1}(\Delta_B),$$

donc L_2 est fermé dans $A_\alpha \times A_\beta$ et, $A_\alpha \times A_\beta$ étant fermé dans $X_\alpha \times X_\beta$,

($A_\alpha \times A_\beta = p_1^{-1}(A_\alpha) \cap p_2^{-1}(A_\beta)$, où $p_1: X_\alpha \times X_\beta \rightarrow X_\alpha$ et $p_2: X_\alpha \times X_\beta \rightarrow X_\beta$ sont les projections, qui sont continues, et A_α et A_β sont fermés dans

X_α et X_β), on voit, en tenant compte de 2.7, que L_2 est fermé

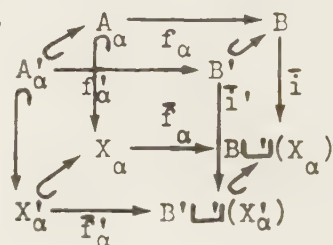


dans $X_\alpha \times X_\beta$, ce qui entraîne finalement que $(\bar{f}_\alpha \times \bar{f}_\beta)^{-1}(\Delta_{B \sqcup (X_\alpha)})$ est fermé dans $X_\alpha \times X_\beta$.

Rappelons que, dans le cas du collage topologique, on ne peut affirmer la séparation de $B \sqcup (X_\alpha)$ qu'avec des conditions plus compliquées (voir 4.6.5 de [14]).

11.3 Proposition. Soient les espaces quasi-topologiques X_α , B , les sous-espaces fermés $A_\alpha \subset X_\alpha$ et les applications continues $f_\alpha: A_\alpha \rightarrow B$. Soit $B' \subset B$, soient X'_α fermés dans X_α et tels que, si $A'_\alpha = X'_\alpha \cap A_\alpha$, on ait $f_\alpha(A'_\alpha) \subset B'$. Soient $f'_\alpha: A'_\alpha \rightarrow B'$ les restrictions des f_α . Alors les A'_α sont fermés dans les X'_α , les f'_α sont continues, et $B' \sqcup (X'_\alpha)$ est un sous-espace quasi-topologique de $B \sqcup (X_\alpha)$.

Démonstration: L'inclusion $\iota_\alpha: X'_\alpha \rightarrow X_\alpha$ étant continue, on voit que $A'_\alpha = \iota_\alpha^{-1}(A_\alpha)$ est fermé dans X'_α et il est immédiat que $f'_\alpha: A'_\alpha \rightarrow B'$ est continue. D'autre part, $B' \sqcup (X'_\alpha)$ étant la somme disjointe de $B' \subset B$ avec les $X'_\alpha - A'_\alpha \subset X_\alpha - A_\alpha$, on a $B' \sqcup (X'_\alpha) \subset B \sqcup (X_\alpha)$ et, $\iota: B' \sqcup (X'_\alpha) \rightarrow B \sqcup (X_\alpha)$ étant l'inclusion, on voit que ι est continue, car $\iota \circ \bar{\iota}'$ et $\iota \circ \bar{\iota}'_\alpha$ le sont. Il reste à prouver que, si F est un filtre dans $B' \sqcup (X'_\alpha)$ avec $\iota(F) \xrightarrow{B \sqcup (X_\alpha)} x$, $x \in B' \sqcup (X'_\alpha)$, alors $F \xrightarrow{B' \sqcup (X'_\alpha)} x$.



a) Soit F un filtre dans $B' \sqcup (X'_\alpha)$ avec $\iota(F) \xrightarrow{B \sqcup (X_\alpha)} b' \in B'$. Il existe alors $F_1 \xrightarrow{B} b'$, $G_1 \xrightarrow{X_{\alpha_1}} a_1 \in A_{\alpha_1}$, ..., $G_n \xrightarrow{X_{\alpha_n}} a_n \in A_{\alpha_n}$, avec $f_{\alpha_i}(a_i) = b'$ et $\iota(F) \supset \bar{\iota}(F_1) \cap \bar{f}'_{\alpha_1}(G_1) \cap \dots \cap \bar{f}'_{\alpha_n}(G_n)$ et on peut déjà supposer, en mettant un ordre sur les indices, que $a_1 \in A'_{\alpha_1}$, ..., $a_m \in A'_{\alpha_m}$, $a_{m+1} \notin A'_{\alpha_{m+1}}$, ..., $a_n \notin A'_{\alpha_n}$. Alors, pour $i \leq m$, $G_i/A_{\alpha_i} \xrightarrow{A_{\alpha_i}} a_i$, donc $f_{\alpha_i}(G_i/A_{\alpha_i}) \xrightarrow{B} b'$ et, pour $i \leq m$, $G_i/X'_{\alpha_i} \xrightarrow{X'_{\alpha_i}} a_i$. Si

$$F_2 = F_1 \cap f'_{\alpha_1}(G_1/A_{\alpha_1}) \cap \dots \cap f'_{\alpha_m}(G_m/A_{\alpha_m}),$$

alors $F_2 \xrightarrow{B} b'$, donc $F_2/\bar{B} \xrightarrow{\bar{B}} b'$ et, si l'on voit que

$$F \supset \bar{\iota}'(F_2/\bar{B}) \cap \bar{f}'_{\alpha_1}(G_1/X'_{\alpha_1}) \cap \dots \cap \bar{f}'_{\alpha_m}(G_m/X'_{\alpha_m}),$$

on en déduira que $F \xrightarrow{B' \sqcup (X')} b'$, ce qui est précisément le résultat cherché. Or, si $K_1 \in F_1$, $L_1 \in G_1, \dots, L_n \in G_n$, $L'_1 \in G'_1, \dots, L'_m \in G'_m$, et si, pour $i > m$, $L_i \cap X'_{\alpha_i} = \emptyset$ (on peut le supposer car $X_{\alpha_i} - X'_{\alpha_i}$ est ouvert dans X_{α_i}), on voit que

$$\begin{aligned} & [B' \cap (K_1 \cup_{\alpha_1} (L_1 \cap A_{\alpha_1}) \cup \dots \cup_{\alpha_n} (L_n \cap A_{\alpha_n}))] \cup \bar{F}'_{\alpha_1} (L'_1 \cap X'_{\alpha_1}) \cup \dots \cup \bar{F}'_{\alpha_m} (L'_m \cap X'_{\alpha_m}) \supset \\ & \supset [B' \sqcup (X'_{\alpha})] \cap [K_1 \cup_{\alpha_1} (L_1 \cap L'_1) \cup \dots \cup_{\alpha_n} (L_n \cap L'_n) \cup \bar{F}_{\alpha_{m+1}} (L_{m+1}) \cup \dots \cup \bar{F}_{\alpha_n} (L_n)] \in \\ & \in {}_1(F) / B' \sqcup (X'_{\alpha}) = F. \end{aligned}$$

b) Soit F un filtre dans $B' \sqcup (X'_{\alpha})$ avec ${}_1(F) \xrightarrow{B \sqcup (X_{\alpha})} x' \in X'_{\alpha} - A'_{\alpha}$. Alors, il existe $G \xrightarrow{X_{\alpha}} x'_{\alpha}$ avec $\bar{F}_{\alpha}(G) \subset {}_1(F)$, et $G / X'_{\alpha} \xrightarrow{X'_{\alpha}} x'_{\alpha}$, et on va voir que $F \supset \bar{F}'_{\alpha}(G / X'_{\alpha})$, ce qui montrera que $F \xrightarrow{B' \sqcup (X'_{\alpha})} x'_{\alpha}$. Or, A_{α} étant fermé dans X_{α} et $x'_{\alpha} \notin A_{\alpha}$, on a $X_{\alpha} - A_{\alpha} \in G$, et, si $L \in G$, $L \cap (X_{\alpha} - A_{\alpha}) \in G$ et $\bar{F}'_{\alpha}(L \cap X'_{\alpha}) \supset [B' \sqcup (X'_{\alpha})] \cap \bar{F}_{\alpha}(L \cap (X_{\alpha} - A_{\alpha})) \in {}_1(F) / B' \sqcup (X'_{\alpha}) = F$.

11.4 Proposition. *Sous les conditions de la proposition antérieure, si B' est fermé dans B , alors $B' \sqcup (X'_{\alpha})$ est fermé dans $B \sqcup (X_{\alpha})$.*

Démonstration: On sait (proposition 2.4) que la topologie associée à $B \sqcup (X_{\alpha})$ est la topologie finale associée aux topologies associées à B et X_{α} et aux applications $\bar{I}$ et $\bar{F}_{\alpha}$. Or, $\bar{I}^{-1}(B' \sqcup (X'_{\alpha})) = B'$ est fermé dans B et $\bar{F}_{\alpha}^{-1}(B' \sqcup (X'_{\alpha})) = f_{\alpha}^{-1}(B') \cup X'_{\alpha}$ avec X'_{α} fermé dans X_{α} et $f_{\alpha}^{-1}(B')$ fermé dans A_{α} ; donc, puisque A_{α} est fermé dans X_{α} , $f_{\alpha}^{-1}(B')$ est fermé dans X_{α} , ce qui montre que $\bar{F}_{\alpha}^{-1}(B' \sqcup (X'_{\alpha}))$ est fermé dans X_{α} ; d'où, finalement, $B' \sqcup (X'_{\alpha})$ est fermé dans $B \sqcup (X_{\alpha})$.

11.5 Corollaire. Soient les espaces quasi-topologiques B , X_{α} ($\alpha \in I$), les sous-espaces fermés $A_{\alpha} \subset X_{\alpha}$ et les applications continues $f_{\alpha}: A_{\alpha} \rightarrow B$. Soit $J \subset I$. Alors $B \sqcup (X_{\alpha})_{\alpha \in J}$ est un sous-espace fermé de $B \sqcup (X_{\alpha})_{\alpha \in I}$.

Démonstration: Il suffit, dans les conditions des propositions antérieures, de prendre $B' = B$, $X'_{\alpha} = X_{\alpha}$ si $\alpha \in J$, $X'_{\alpha} = \emptyset$ si $\alpha \notin J$ et d'utiliser l'égalité (évidente) $B \sqcup (X_{\alpha})_{\alpha \in J} = B' \sqcup (X'_{\alpha})_{\alpha \in I}$.

On va maintenant examiner un cas où le collage topologique est aussi un collage quasi-topologique.

11.6 Proposition. Soient les espaces topologiques $B, X_1, \dots, X_n$, soient les sous-espaces fermés $A_i \subset X_i$, soient $f_i: A_i \rightarrow B$ des applications continues, fermées et telles que chaque $f_i^{-1}(b)$ ($b \in B$) soit fini. Alors $B \sqcup X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n = B \sqcup X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n$.

Démonstration: $1_0: B \sqcup (X_i) \rightarrow B \sqcup (X_i)$, où $C = B \sqcup (X_i)$ est continue, car $1_0|_B: B \rightarrow B \sqcup (X_i)$ et $1_0|_{X_i}: X_i \rightarrow B \sqcup (X_i)$ sont continues. Reste à prouver que $1_0: B \sqcup (X_i) \rightarrow B \sqcup (X_i)$ est continue. Or, si $x_i \in X_i - A_i$, en représentant par V'_u les filtres de voisinages dans $B \sqcup (X_i)$ et par V_u les filtres de voisinages dans B et dans les X_i , on a $V'_{x_i} \supset \bar{f}_i(V_{x_i})$, car, si $x_i \in W_i$, W_i ouvert dans X_i , et supposant déjà $W_i \subset X_i - A_i$, alors $\bar{f}_i(W_i) = W_i$ est ouvert dans $B \sqcup (X_i)$ (car $X_i - A_i$ est un sous-espace ouvert de $B \sqcup (X_i)$). Donc $V'_{x_i} \rightarrow x_i$ dans $B \sqcup (X_i)$.

Si $b \in B$, soient, pour chaque i , $x_{i,1}, \dots, x_{i,m_i}$ les éléments x_i de A_i tels que $f_i(x_i) = b$ ($m_i \geq 0$); on va voir que

$$V'_b \supset \bar{f}_1(V_{x_{1,1}}) \cap \bar{f}_1(V_{x_{1,m_1}}) \cap \dots \cap \bar{f}_2(V_{x_{2,1}}) \cap \bar{f}_2(V_{x_{2,m_2}}) \dots,$$

ce qui montrera que $V'_b \rightarrow b$ dans $B \sqcup (X_i)$ et terminera la démonstration.

Soient $b \in U$ ouvert de B , $x_{i,j} \in U_{i,j}$ ouvert de X_i . Pour chaque i , $A_i \cap (U_{i,1} \cup \dots \cup U_{i,m_i})$ est un ouvert de A_i , donc $A_i - (U_{i,1} \cup \dots \cup U_{i,m_i})$ est fermé dans A_i et, l'application f_i étant fermée, $f_i(A_i - (U_{i,1} \cup \dots \cup U_{i,m_i}))$ est fermé dans B ; en posant $W_i = B - f_i(A_i - (U_{i,1} \cup \dots \cup U_{i,m_i}))$, W_i est ouvert dans B et $b \in W_i$, et $f_i^{-1}(W_i) \subset U_{i,1} \cup \dots \cup U_{i,m_i}$. Soit $W = U \cup U_1 \cup \dots \cup U_n$; on a $b \in W$, W étant ouvert dans B . Pour chaque i , $f_i^{-1}(W)$ étant ouvert dans A_i , on voit que $f_i^{-1}(W) = A_i \cap L_i$ avec L_i ouvert dans X_i . Soit $W_{i,j} = U_{i,j} \cap L_i$; alors $x_{i,j} \in W_{i,j}$ qui est ouvert dans X_i . Soit $D = \bar{f}_1(W) \cap \bar{f}_1(W_{1,1}) \cup \dots \cup \bar{f}_1(W_{1,m_1}) \cap \bar{f}_2(W_{2,1}) \cup \dots$; on obtient $b \in D$, $\bar{f}_i^{-1}(D) = W$, $\bar{f}_i^{-1}(D) = W_{i,1} \cup \dots \cup W_{i,m_i}$, de sorte que D est ouvert dans $B \sqcup (X_i)$, donc $D \in V'_b$; comme $D \subset \bar{f}_1(U) \cap \bar{f}_1(U_{1,1}) \cup \dots \cup \bar{f}_1(U_{1,m_1}) \cap \bar{f}_2(U_{2,1}) \cup \dots$, il en découle $\bar{f}_1(U) \cap \bar{f}_1(U_{1,1}) \cup \dots \cup \bar{f}_1(U_{1,m_1}) \cap \bar{f}_2(U_{2,1}) \cup \dots \in V'_b$.

Remarquons que la condition que f_i soit fermée est vérifiée dans la pratique, par exemple si A_i est compact et B séparé. C'est la

condition que chaque $f_i^{-1}(b)$ soit fini qui est moins souvent satisfaite dans les applications. Si E est un espace quasi-topologique et $A \subset E$, on peut considérer un espace réduit à un point $\{\omega\}$ et l'unique application $f:A \rightarrow \{\omega\}$; on dit alors que le collage correspondant $\{\omega\} \sqcup E$ est un espace quasi-topologique obtenu à partir de E par contraction de A en un point (on le représente souvent par $\frac{E}{A}$).

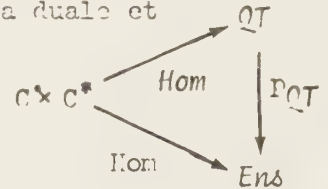
$\{\omega\} \sqcup E$ est muni de la quasi-topologie finale définie par $f:E \rightarrow \{\omega\} \sqcup E$, car, quel que soit $g:\{\omega\} \sqcup E \rightarrow E'$, $g \circ f$ est toujours continue. Si $A \neq \emptyset$, f est surjective et $f(x) = f(y)$ si, et seulement si, $x = y$, où $x, y \in A$, ce qui montre que $\{\omega\} \sqcup E$ est, dans ce cas, le quotient quasi-topologique de E par la relation antérieure. Si $A = \emptyset$, $\{\omega\} \sqcup E$ est la somme disjointe de E et $\{\omega\}$.

CHAPITRE II

QUASI-TOPOLOGIE ALGEBRIQUE

1. Les catégories p_{QT} -dominées. Homotopie, fibrations et cofibrations

Rappelons qu'on représente par p_{QT} le foncteur d'oubli de la catégorie QT des espaces quasi-topologiques vers la catégorie Ens des ensembles. On sait ([15]) qu'une catégorie p_{QT} -dominée est alors un couple (C^*, Hom) , où C^* est une catégorie, C^* sa duale et $Hom: C^* \times C^* \rightarrow QT$ un foncteur tel que $p_{QT} \circ Hom = Hom$, où $Hom: C^* \times C^* \rightarrow Ens$ est le foncteur qui associe à $(g, f) \in C^* \times C^*$ l'application de $\alpha(g) \cdot C \cdot \beta(f)$ vers $\beta(g) \cdot C \cdot \alpha(f)$ définie par $h \mapsto g \cdot h \cdot f$. Ceci revient à donner, pour chaque couple d'unités e, e' de C^* , une quasi-topologie sur $Hom(e', e)$, de telle façon que, pour $g: e' \rightarrow e''$, $f: e''' \rightarrow e$, l'application $Hom(g, f): Hom(e', e) \rightarrow Hom(e'', e''')$ soit continue.



Etant donné la catégorie C^* , on peut considérer un foncteur

$$\Theta: C^* \times C^* \rightarrow C^* \times C^*$$

défini par $(f, g) \mapsto (g, f)$. Si on représente par Hom^* le foncteur Hom de la catégorie C^* duale, on a $Hom^* = Hom \circ \Theta$. Si (C^*, Hom) est une catégorie p_{QT} -dominée, on obtient une nouvelle catégorie p_{QT} -dominée (C^*, Hom^*) , en notant $Hom^* = Hom \circ \Theta$, et on appelle $(C^*, ilom^*)$ la catégorie p_{QT} -dominée duale, la quasi-topologie sur $Hom^*(e', e)$ étant précisément la quasi-topologie qui était considérée sur $Hom(e, e')$. Bien entendu la duale de $(C^*, ilom^*)$ est $(C^*, ilom)$.

1.1 Définition. Si (C^*, Hom) est une catégorie p_{QT} -dominée, les morphismes f et g de C sont dits *homotopes* (et on écrit $f \sim g$) si $\alpha(f) = \alpha(g) = e$, $\beta(f) = \beta(g) = e'$ et si le couple (f, g) est connexe par arcs dans $Hom(e', e)$.

1.2 Proposition. Soit (C^*, Hom) une catégorie p_{QT} -dominée. La relation "homotope" est une relation d'équivalence dans C et, si $f \sim f'$, $g \sim g'$, $\alpha(g) = \beta(f)$, alors $g \cdot f \sim g' \cdot f'$.

Démonstration: On a une relation d'équivalence, car la relation

"connexe par arcs" est une relation d'équivalence. Supposons $f \sim f'$, $g \sim g'$, $\alpha(f) = e$, $\beta(f) = \alpha(g) = e'$, $\beta(g) = e''$. Soit une application continue $\xi: [0,1] \rightarrow \text{Hom}(e', e)$, avec $\xi(0) = f$, $\xi(1) = f'$. Si on définit $\xi': [0,1] \rightarrow \text{Hom}(e'', e)$ par $\xi' = \text{Hom}(g, e) \circ \xi$, on voit que ξ' est continue, $\xi'(0) = g \cdot f$, $\xi'(1) = g \cdot f'$, donc $g \cdot f \sim g \cdot f'$. De même $g \cdot f' \sim g' \cdot f'$, d'où, par transitivité, $g \cdot f \sim g' \cdot f'$.

1.3 Corollaire. Il existe une catégorie $\frac{C^*}{\sim}$ quotient strict de C^* par $\sim$, et on a de plus $(\frac{C^*}{\sim})^* = \frac{C^*}{\sim}$.

Etant donné une catégorie C^* , on peut, pour chaque unité $e \in C_0^*$, associer au foncteur $\text{Hom}: C^* \times C^* \rightarrow \text{Ens}$ deux foncteurs

$$\text{Hom}_e: C^* \rightarrow \text{Ens}, \quad \text{Hom}^e: C^* \rightarrow \text{Ens}$$

obtenus en fixant une des variables:

$$\text{Hom}_e(f) = \text{Hom}(f, e), \quad \text{Hom}^e(f) = \text{Hom}(e, f).$$

De même, si (C^*, Hom) est une catégorie $\mathcal{P}\mathcal{Q}\mathcal{T}$ -dominée, on définit, pour chaque unité e , les foncteurs $\text{Hom}_e: C^* \rightarrow \mathcal{Q}\mathcal{T}$, $\text{Hom}^e: C^* \rightarrow \mathcal{Q}\mathcal{T}$, et on a toujours $\mathcal{P}\mathcal{Q}\mathcal{T} \circ \text{Hom}_e = \text{Hom}_e$, $\mathcal{P}\mathcal{Q}\mathcal{T} \circ \text{Hom}^e = \text{Hom}^e$. On a aussi $\text{Hom}_e^* = \text{Hom}^e$, $\text{Hom}^{*e} = \text{Hom}_e$.

1.4 Définition. Soit (C^*, Hom) une catégorie $\mathcal{P}\mathcal{Q}\mathcal{T}$ -dominée. Si $\lambda: J^* \rightarrow C^*$ est un foncteur admettant une limite projective $e \in C_0^*$, les projections étant $q_i: e \rightarrow \lambda(i)$ ($i \in J_0^*$), on dit que cette limite est *compatible* si, quel que soit $e' \in C_0^*$, le foncteur

$$\text{Hom}_e, \circ \lambda: J^* \rightarrow \mathcal{Q}\mathcal{T}$$

admet $\text{Hom}_e(e) = \text{Hom}(e, e')$ pour limite projective, les projections étant $\text{Hom}_e(q_i) = \text{Hom}(q_i, e'): \text{Hom}(e, e') \rightarrow \text{Hom}(\lambda(i), e')$. Si $\lambda: J^* \rightarrow C^*$ est un foncteur admettant une limite inductive $e \in C_0^*$, les injections étant $q_i: \lambda(i) \rightarrow e$ ($i \in J_0^*$), on dit que cette limite est *compatible* si, quel que soit $e' \in C_0^*$, le foncteur $\text{Hom}^{e'} \circ \lambda: J^* \rightarrow \mathcal{Q}\mathcal{T}$ admet $\text{Hom}^{e'}(e) = \text{Hom}(e', e)$ pour limite projective, les projections étant $\text{Hom}^{e'}(q_i) = \text{Hom}(e', q_i): \text{Hom}(e', e) \rightarrow \text{Hom}(e', \lambda(i))$ ($\lambda^*: J^* \rightarrow C^*$ est le foncteur dual de λ , qui admet e pour limite projective, les projections étant $q_i: e \rightarrow \lambda(i)$).

1.5 Corollaire. Si (C^*, Hom) est une catégorie $\mathcal{P}\mathcal{Q}\mathcal{T}$ -dominée et si $\lambda: J^* \rightarrow C^*$ est un foncteur, alors λ admet une limite inductive compa-

tible $e \in C_0^*$, avec les injections $q_i: \lambda(i) \rightarrow e$, si, et seulement si, $\lambda^*: J^* \rightarrow C^*$ admet e pour limite projective compatible, avec les projections $q_i: e \rightarrow \lambda(i)$, dans la catégorie p_{QT} -dominée duale (C^*, Hom^*) .

1.6 Proposition. Soit (C^*, Hom) une catégorie p_{QT} -dominée. Si $\lambda: J^* \rightarrow C^*$ est un foncteur admettant la limite projective $e \in C_0^*$ pour les $q_i: e \rightarrow \lambda(i)$ ($i \in J_0^*$), alors cette limite est compatible si, et seulement si, quel que soit $e' \in C_0^*$, la quasi-topologie de $Hom(e, e')$ est la quasi-topologie initiale déterminée par les applications

$$Hom(q_i, e'): Hom(e, e') \rightarrow Hom(\lambda(i), e')$$

et les quasi-topologies $Hom(\lambda(i), e')$. Si $\lambda: J^* \rightarrow C^*$ est un foncteur admettant la limite inductive $e \in C_0^*$ pour les injections $q_i: \lambda(i) \rightarrow e$ ($i \in J_0^*$), alors cette limite est compatible si, et seulement si, quel que soit $e' \in C_0^*$, la quasi-topologie de $Hom(e', e)$ est la quasi-topologie initiale déterminée par les applications

$$Hom(e', q_i): Hom(e', e) \rightarrow Hom(e', \lambda(i))$$

et les quasi-topologies $Hom(e', \lambda(i))$.

Démonstration: Il suffit de remarquer que, si $\lambda: J^* \rightarrow C^*$ admet la limite projective e avec les projections $q_i: e \rightarrow \lambda(i)$, alors, pour tout $e' \in C_0^*$, le foncteur $Hom_{e'} \circ \lambda: J^* \rightarrow Ens$ admet la limite projective $Hom_{e'}(e)$ avec les projections

$$Hom_{e'}(q_i): Hom_{e'}(e) \rightarrow Hom_{e'}(\lambda(i))$$

et que, si $\lambda: J^* \rightarrow C^*$ admet la limite inductive e avec les injections $q_i: \lambda(i) \rightarrow e$, alors, pour tout $e' \in C_0^*$, le foncteur $Hom^{e'} \circ \lambda: J^* \rightarrow Ens$ admet la limite projective $Hom^{e'}(e)$ avec les projections

$$Hom^{e'}(q_i): Hom^{e'}(e) \rightarrow Hom^{e'}(\lambda(i)),$$

ceci résultant simplement des définitions de limite projective et inductive et de la construction explicite des limites projectives dans la catégorie Ens .

1.7 Proposition. Soit la catégorie p_{QT} -dominée (C^*, Hom) et $H: C^* \rightarrow \frac{C^*}{\sim}$ le foncteur canonique. Alors, si les $e_i \in C_0^*$ ($i \in J$) admettent un produit $e \in C_0^*$ compatible avec les projections $q_i: e \rightarrow e_i$, les $H(e_i)$ admettent $H(e)$ pour produit, pour les projections

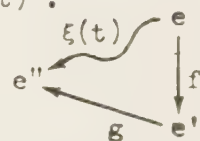
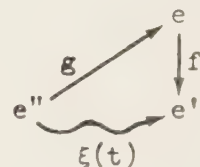
$$H(q_i): H(e) \rightarrow H(e_i).$$

Démonstration: Soient les morphismes $H(f_i) = [f_i]_{\sim}: e' \rightarrow e_i$ dans $\frac{C^*}{\sim}$;

soit $f: e' \rightarrow e$ le morphisme de C^* défini par $q_i \cdot f = f_i$; $|f|_\sim: e' \rightarrow e$ est alors un morphisme de $\frac{C^*}{\sim}$ et $|q_i|_\sim \cdot |f|_\sim = |f_i|_\sim$. Soit $|g|_\sim: e' \rightarrow e$ un morphisme de $\frac{C^*}{\sim}$ tel que $|q_i|_\sim \cdot |g|_\sim = |f_i|_\sim$, c'est-à-dire $q_i \cdot g \sim f_i$. Il existe des applications continues $\xi_i: [0,1] \rightarrow \text{Hom}(e_i, e')$ telles que $\xi_i(0) = q_i \cdot g$, $\xi_i(1) = f_i$ et si on définit, pour chaque $t \in [0,1]$, $\xi(t) \in \text{Hom}(e, e')$ par la condition $q_i \cdot \xi(t) = \xi_i(t)$, l'application $\xi: [0,1] \rightarrow \text{Hom}(e, e')$ est continue (car le produit est compatible) et $\xi(0) = g$, $\xi(1) = f$; donc $g \sim f$, $|g|_\sim = |f|_\sim$.

1.8 Remarque. On a évidemment la proposition duale, concernant les sommes compatibles. Dans la suite on n'énoncera pas les résultats duaux de ceux qu'on obtient. On se gardera de croire que la proposition antérieure reste valable pour d'autres types de limites projectives que les produits.

1.9 Définition. Soit (C^*, Hom) une catégorie p_{OT} -dominée, $f \in \text{Hom}(e', e)$ est appelé une *fibration* si, quels que soient $e'' \in C^*$, l'application continue $\xi: [0,1] \rightarrow \text{Hom}(e', e'')$ et le morphisme $g \in \text{Hom}(e, e'')$ tels que $f \cdot g = \xi(0)$, il existe une application continue $\eta: [0,1] \rightarrow \text{Hom}(e, e'')$ telle que $\eta(0) = g$, et $f \cdot \eta(t) = \xi(t)$. $f \in \text{Hom}(e', e)$ est appelée une *cofibration* si, quels que soient $e'' \in C^*$, l'application continue $\xi: [0,1] \rightarrow \text{Hom}(e'', e)$ et le morphisme $g \in \text{Hom}(e'', e')$ tels que $g \cdot f = \xi(0)$, il existe une application continue $\eta: [0,1] \rightarrow \text{Hom}(e'', e')$ telle que $\eta(0) = g$ et $\eta(t) \cdot f = \xi(t)$.



1.10 Corollaire. f est une cofibration si, et seulement si, f est une fibration dans la catégorie p_{OT} -dominée duale (C^*, Hom^*) .

1.11 Proposition. Si $f \in \text{Hom}(e'', e')$ et $g \in \text{Hom}(e', e)$ sont des fibrations de (C^*, Hom) , alors $f \cdot g$ est une fibration.

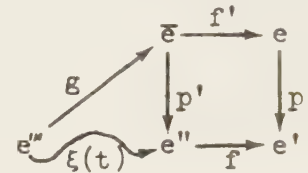
Démonstration: Soit $\xi: [0,1] \rightarrow \text{Hom}(e'', e''')$ continue et $h \in \text{Hom}(e, e''')$, tels que $f \cdot g \cdot h = \xi(0)$. Il existe une application continue $\eta: [0,1] \rightarrow \text{Hom}(e', e''')$ telle que $\eta(0) = g \cdot h$ et $f \cdot \eta(t) = \xi(t)$, et on voit qu'il existe une application continue $\psi: [0,1] \rightarrow \text{Hom}(e, e''')$, avec $\psi(0) = h$ et $g \cdot \psi(t) = \eta(t)$, donc $f \cdot g \cdot \psi(t) = \xi(t)$.

1.12 Proposition. Si $f \in \text{Hom}(e', e)$ est inversible, alors f est une fibration.

Démonstration: Soit $\xi: [0, 1] \rightarrow \text{Hom}(e', e'')$ continue et $\zeta \in \text{Hom}(e, e'')$ tels que $f \cdot \zeta = \xi(0)$. En posant $\eta = \text{Hom}(f^{-1}, e'') \circ \xi: [0, 1] \rightarrow \text{Hom}(e, e'')$, η est continue, $\eta(0) = f^{-1} \cdot \xi(0) = \zeta$ et $f \cdot \eta(t) = f \cdot f^{-1} \cdot \xi(t) = \xi(t)$.

1.13 Proposition. Soit (C^*, Hom) une catégorie p_{OT} -dominée, soit $p \in \text{Hom}(e', e)$ une fibration. Soit $f \in \text{Hom}(e', e'')$, soit $\bar{e}$ un produit fibré de f et p , les projections étant $p': \bar{e} \rightarrow e''$ et $f': \bar{e} \rightarrow e'$. Alors, si ce produit fibré est compatible, p' est une fibration.

Démonstration: Soient $\xi: [0, 1] \rightarrow \text{Hom}(e'', e''')$ continue et $g \in \text{Hom}(\bar{e}, e''')$, tels que $p' \cdot g = \xi(0)$. En posant $\xi' = \text{Hom}(f, e''') \circ \xi: [0, 1] \rightarrow \text{Hom}(e', e''')$, on voit que ξ' est continue et que $p \cdot f' \cdot \zeta = f \cdot p' \cdot g = f \cdot \xi(0) = \xi'(0)$, ce qui entraîne qu'il existe une application continue $\eta: [0, 1] \rightarrow \text{Hom}(e, e''')$ avec $\eta(0) = f' \cdot g$ et $p \cdot \eta(t) = \xi'(t) = f \cdot \xi(t)$. Pour chaque t , il existe un, et un seul, $\psi(t) \in \text{Hom}(\bar{e}, e''')$ tel que $p' \cdot \psi(t) = \xi(t)$ et $f' \cdot \psi(t) = \eta(t)$; l'application $\psi: [0, 1] \rightarrow \text{Hom}(\bar{e}, e''')$ est continue, le produit fibré étant compatible, et on a $\psi(0) = g$.



1.14 Définition. Sous les conditions de la proposition antérieure, p' est appelée *image réciproque de la fibration p* par l'application $f: e'' \rightarrow e'$.

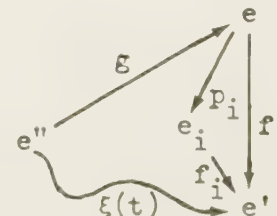
1.15 Proposition. Soit (C^*, Hom) une catégorie p_{OT} -dominée, soient les fibrations $f_i: e_i \rightarrow e'$ admettant le produit fibré e , les projections étant $p_i: e \rightarrow e_i$. Soit $f = f_i \cdot p_i$. Alors, si ce produit fibré est compatible, f est une fibration.

Démonstration: Soient l'application continue $\xi: [0, 1] \rightarrow \text{Hom}(e', e'')$ et $g \in \text{Hom}(e, e'')$, avec $f \cdot g = \xi(0)$. Pour chaque i , $f_i \cdot p_i \cdot g = \xi(0)$ et il existe donc une application continue

$$\eta_i: [0, 1] \rightarrow \text{Hom}(e_i, e'')$$

telle que $\eta_i(0) = p_i \cdot g$ et $f_i \cdot \eta_i(t) = \xi(t)$. On

voit que, pour chaque $t \in [0, 1]$, il existe un, et un seul, morphisme



$\eta(t):e'' \rightarrow e$ tel que $p_i \cdot \eta(t) = \eta_i(t)$, et l'application

$$\eta:[0,1] \rightarrow \text{Hom}(e,e'')$$

est continue et vérifie $\eta(0) = g$ et $f \cdot \eta(t) = f_i \cdot p_i \cdot \eta(t) = f_i \cdot \eta_i(t) = \xi(t)$.

1.16 Proposition. Soit (C', Hom) une catégorie $\mathbf{PCT}$ -dominée, soient les fibrations $f_i \in \text{Hom}(e'_i, e_i)$, soient e' un produit des e'_i et e un produit des e_i , les projections étant $p_i: e \rightarrow e_i$ et $p'_i: e' \rightarrow e'_i$. Soit $f: e \rightarrow e'$ le morphisme produit. Alors, si les produits considérés sont compatibles, f est une fibration.

Démonstration: Soient l'application continue

$\xi:[0,1] \rightarrow \text{Hom}(e', e'')$ et $g \in \text{Hom}(e, e'')$ tels que $f \cdot g = \xi(0)$. Soit pour chaque i ,

$$\xi_i = \text{Hom}(p'_i, e'') \circ \xi: [0,1] \rightarrow \text{Hom}(e'_i, e'').$$

L'application ξ_i est continue et

$$f_i \cdot p_i \cdot g = p'_i \cdot f \cdot g = p'_i \cdot \xi(0) = \xi_i(0);$$

il existe donc $\eta_i: [0,1] \rightarrow \text{Hom}(e'_i, e'')$ tel que

$$\eta_i(0) = p_i \cdot g \text{ et } f_i \cdot \eta_i(t) = \xi_i(t) = p'_i \cdot \xi(t).$$

Considérant, pour chaque t , $\eta(t) \in \text{Hom}(e, e'')$ défini par

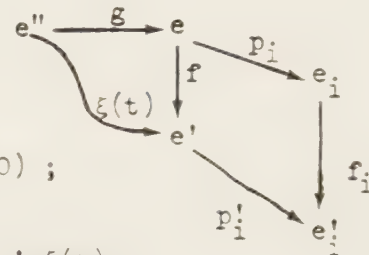
$p_i \cdot \eta(t) = \eta_i(t)$, on obtient une application continue

$$\eta:[0,1] \rightarrow \text{Hom}(e, e'')$$

avec $\eta(0) = g$ et

$$p'_i \cdot f \cdot \eta(t) = f_i \cdot p_i \cdot \eta(t) = f_i \cdot \eta_i(t) = p'_i \cdot \xi(t),$$

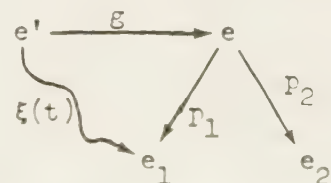
d'où $f \cdot \eta(t) = \xi(t)$.



1.17 Remarque. On ne doit pas espérer que la proposition antérieure reste valable quand on considère, à la place de produits, d'autres types de limites projectives.

1.18 Proposition. Soit (C', Hom) une catégorie $\mathbf{PCT}$ -dominée, soit $e \in C'_0$ un produit de e_1 et e_2 , les projections étant $p_1: e \rightarrow e_1$, $p_2: e \rightarrow e_2$. Alors, si ce produit est compatible, p_1 et p_2 sont des fibrations.

Démonstration: Soient l'application continue $\xi:[0,1] \rightarrow \text{Hom}(e_1, e')$ et $g \in \text{Hom}(e, e')$ tels que $p_1 \cdot g = \xi(0)$. Soit l'application, de valeur constante $p_2 \cdot g$, $\eta:[0,1] \rightarrow \text{Hom}(e_2, e')$ qui est continue. Pour chaque t , soit $\eta(t) \in \text{Hom}(e, e')$ le morphisme



défini par $p_2 \cdot \psi(t) = \eta(t)$, $p_1 \cdot \psi(t) = \xi(t)$; on a une application continue $\psi: [0,1] \rightarrow \text{Hom}(e,e')$ et l'on voit que $\psi(0) = g$.

2. La catégorie p_{QT} -dominée QT . Les cofibrations dans QT .

On a déjà dit, dans le premier chapitre, que, dans la catégorie des espaces quasi-topologiques, QT , on note $\text{Hom}(\pi', \pi)$ l'ensemble $\text{Hom}(\pi', \pi)$ muni de la quasi-topologie de la convergence locale. (QT, Hom) est alors une catégorie p_{QT} -dominée (I 3.1). Les quasi-topologies initiales et finales existant toujours, on sait que QT admet des limites inductives et projectives compatibles avec le foncteur d'oubli (il suffit de relever par des structures finales et initiales les limites inductives et projectives dans Ens). Si l'on tient compte, de plus, des propositions I 3.2 et I 3.4 (pour toute limite inductive dans QT la condition $E = \text{Uf}_i(E_i)$ est vérifiée) ainsi que de la proposition 1.6, on voit que ces limites projectives et inductives sont compatibles avec la structure de catégorie p_{QT} -dominée de QT .

On représente souvent par I l'intervalle $[0,1]$ muni de sa topologie canonique. Une (co)fibration dans (QT, Hom) sera appelée simplement une (co)fibration dans QT ou même une (co)fibration.

Si l'on tient compte de la caractérisation universelle (I 3) de la quasi-topologie de la convergence locale, on obtient:

2.1 Proposition. Soient E et E' des espaces quasi-topologiques, soit $f: E \rightarrow E'$ une application continue. Alors f est une cofibration si, et seulement si, quels que soient l'espace quasi-topologique E'' et les applications continues $g: E' \rightarrow E''$, $h: E \times [0,1] \rightarrow E''$ telles que $h(x,0) = g(f(x))$, il existe une application continue $G: E' \times [0,1] \rightarrow E''$ telle que $G(y,0) = g(y)$, $G(f(x),t) = h(x,t)$.

Démonstration: Il suffit de remarquer qu'on a une bijection naturelle entre l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ vers $\text{Hom}(E'', E)$ et l'ensemble des applications continues de $E \times [0,1]$ vers E'' (associant, à $\xi: [0,1] \rightarrow \text{Hom}(E'', E)$, $\bar{\xi}: E \times [0,1] \rightarrow E''$ défini par $(x,t) \mapsto \xi(t)(x)$) et de même avec E' à la place de E .

Soit $f: A \rightarrow E$ une application continue entre espaces quasi-topologiques. $A \times \{0\}$ est un sous-espace fermé de $A \times [0,1]$ et on peut considérer une application continue $f': A \times \{0\} \rightarrow E$, $(a,0) \mapsto f(a)$, ce qui

nous permet de prendre un collage (I 11) $E \sqcup_f A \times [0,1]$. On a une application continue $\hat{f}: E \sqcup_f A \times [0,1] \rightarrow E \times [0,1]$ qui associe, à $x \in E$, $(x,0) \in E \times [0,1]$ et à $(a,t) \in A \times [0,1]$, $(f(a),t) \in E \times [0,1]$ (c'est l'application associée aux applications $E \rightarrow E \times [0,1]$, $x \mapsto (x,0)$ et $A \times [0,1] \rightarrow E \times [0,1]$, $(a,t) \mapsto (f(a),t)$).

2.2 Proposition. Une application continue $f: A \rightarrow E$ est une cofibration si, et seulement si, il existe une application continue $r: E \times [0,1] \rightarrow E \sqcup_f A \times [0,1]$ telle que $r \circ \hat{f} = 1_{E \sqcup_f A \times [0,1]}$.

Démonstration: a) Supposons que f soit une cofibration. En considérant les applications canoniques

$$\bar{f}: E \rightarrow E \sqcup_f A \times [0,1], \quad \bar{f}': A \times [0,1] \rightarrow E \sqcup_f A \times [0,1],$$

on voit que $\bar{f}'(a,0) = \bar{f}(f(a))$, ce qui montre qu'il existe (proposition 2.1) $r: E \times [0,1] \rightarrow E \sqcup_f A \times [0,1]$ tel que $r(x,0) = \bar{f}(x)$, $r(f(a),t) = \bar{f}'(a,t)$, et ceci entraîne que $r \circ \hat{f} = \text{id}$.

b) Supposons qu'il existe $r: E \times [0,1] \rightarrow E \sqcup_f A \times [0,1]$ tel que $r \circ \hat{f} = \text{id}$.

Soit E' un espace quasi-topologique et soient les applications continues $g: E \rightarrow E'$, $h: A \times [0,1] \rightarrow E'$ telles que $g(f(a)) = h(a,0)$. Les applications g et h définissent une application continue

$h: E \sqcup_f A \times [0,1] \rightarrow E'$ et on peut définir une application continue

$G: E \times [0,1] \rightarrow E'$, $G = h \circ r$, vérifiant $G(x,0) = g(x)$, $G(f(a),t) = h(a,t)$, ce qui montre que f est une cofibration.

2.3 Proposition. Si $f: A \rightarrow E$ est une cofibration, alors $f: A \rightarrow E$ est un p_{OT} -monomorphisme ([15]).

Démonstration: Parce qu'on a $r \circ \hat{f} = \text{id}$, $\hat{f}: E \sqcup_f A \times [0,1] \rightarrow E \times [0,1]$ est un p_{OT} -monomorphisme. On peut définir des applications continues $\alpha: A \rightarrow E \sqcup_f A \times [0,1]$, $\beta: E \rightarrow E \times [0,1]$, $\alpha(a) = (a,1)$, $\beta(x) = (x,1)$, et alors α et β sont des p_{OT} -monomorphismes (tenir compte de I 11.1 et du fait que, pour $Y \in \mathcal{Y}$, l'application $X \rightarrow X \times Y$, $x \mapsto (x,y)$ définit un p_{OT} -monomorphisme, car elle a un inverse à gauche). Si on tient compte de l'égalité $\beta \circ f = \hat{f} \circ \alpha$, on voit que f définit, lui aussi, un p_{OT} -monomorphisme.

La proposition antérieure montre que, pour l'étude des cofibrations, on peut se ramener au cas où $f: A \rightarrow E$ est l'inclusion d'un sous-espace

quasi-topologique, et c'est ce que l'on fera dorénavant.

2.4 Proposition. Soit E un espace quasi-topologique et $A \subseteq E$, tel que l'inclusion $f: A \rightarrow E$ soit une cofibration. Alors, si E est séparé, A est fermé dans E .

Démonstration: Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & E \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ E \sqcup A \times I & \xrightarrow{\hat{f}} & E \times I \end{array}$$

à droite. Puisqu'il existe $r: E \times [0,1] \rightarrow E \sqcup A \times [0,1]$ tel que $r \circ \hat{f} = \text{id}$ et que $E \times [0,1]$ est séparé, on voit que $\hat{f}(E \sqcup A \times I) = \{x \in E \times I / \hat{f}(r(x)) = x\}$ est fermé dans $E \times I$ (c'est l'image réciproque de la diagonale de $E \times I$ par l'application continue $E \times I \rightarrow (E \times I) \times (E \times I)$, $x \mapsto (x, \hat{f}(r(x)))$). Pour montrer que $A = f(\underline{A})$ est fermé dans E , il nous suffit de voir que $\beta(\hat{f}(\underline{A}))$ est fermé dans $E \times I$ ou encore que $\alpha(\underline{A})$ est fermé dans $E \sqcup A \times I$ (Proposition I 2.7). Mais ceci est vrai parce que, si $\bar{f}: E \rightarrow E \sqcup A \times I$ et $\bar{f}': A \times I \rightarrow E \sqcup A \times I$ sont les morphismes canoniques, on a $\bar{f}^{-1}(\alpha(\underline{A})) = \emptyset$ et $\bar{f}'^{-1}(\alpha(\underline{A})) = \underline{A} \times \{1\}$ fermé dans $A \times I$.

2.5 Proposition. Soient E un espace quasi-topologique, $A \subseteq E$ fermé et $f: A \rightarrow E$ l'inclusion. On a alors un collage de $(E, A \times I)$ en prenant le sous-espace $E \times \{0\} \cup A \times I$ de $E \times I$, avec les morphismes canoniques

$\bar{f}: E \rightarrow E \times \{0\} \cup A \times I$, $x \mapsto (x, 0)$, $\bar{f}': A \times I \rightarrow E \times \{0\} \cup A \times I$, $(a, t) \mapsto (a, t)$. Alors $\hat{f}: E \times \{0\} \cup A \times I \rightarrow E \times I$ est l'inclusion.

Démonstration: Il est immédiat que l'ensemble sous-jacent à $E \times \{0\} \cup A \times I$ est un collage des ensembles sous-jacents à E et $A \times I$ pour $\bar{f}$ et $\bar{f}'$. Pour montrer qu'on a un collage quasi-topologique, il nous suffit donc de voir que $E \times \{0\} \cup A \times I$ a la quasi-topologie finale déterminée par $\bar{f}$ et $\bar{f}'$, ou encore qu'il a la quasi-topologie finale déterminée par les inclusions des sous-espaces $E \times \{0\}$ et $A \times I$, ce qui est vrai, car $E \times \{0\}$ et $A \times I$, fermés dans $E \times I$ (par exemple $\underline{A} \times \underline{I} = p_1^{-1}(\underline{A})$ où $p_1: E \times I \rightarrow E$ est la projection continue), sont aussi fermés dans $E \times \{0\} \cup A \times I$ (l'inclusion $\iota: E \times \{0\} \cup A \times I \rightarrow E \times I$ est continue) et l'on tient compte des propositions I 7.7 et I 7.8. Il est clair que $\hat{f}$ est alors l'inclusion.

2.6 Corollaire. Si E est un espace quasi-topologique et $A \subseteq E$ un fermé, alors l'inclusion $f: A \rightarrow E$ est une cofibration si, et seulement si, il existe une application continue $r: E \times I \rightarrow E \times \{0\} \cup A \times I$ telle

$\text{ro}_1 = \text{id}$ (où $\iota: E \times \{0\} \cup A \times I \rightarrow E \times I$ est l'inclusion).

La catégorie $\mathcal{T}$ des espaces topologiques étant une sous-catégorie pleine de $\mathcal{QT}$, elle a une structure induite de catégorie $\mathcal{PQT}$ -dominée et on peut donc aussi considérer les notions de fibration et cofibration dans $\mathcal{T}$. Un morphisme de $\mathcal{T}$ qui est une cofibration dans $\mathcal{QT}$ est, évidemment, une cofibration dans $\mathcal{T}$, mais la réciproque n'est pas obligatoirement vraie. Cependant, toutes les propositions qu'on a démontré pour les cofibrations dans $\mathcal{QT}$ sont aussi valables pour les cofibrations dans $\mathcal{T}$, dès que l'on considère des collages topologiques au lieu de collages quasi-topologiques. Ceci nous conduit aux propositions:

2.7 Proposition. *Si E est un espace topologique et si $A \subseteq E$ est fermé, alors l'inclusion $\iota: A \rightarrow E$ est une cofibration dans $\mathcal{T}$ si, et seulement si, elle est une cofibration dans $\mathcal{QT}$.*

2.8 Proposition. *Si $f: A \rightarrow E$ est une application continue entre espaces topologiques et si E est séparé, alors f est une cofibration dans $\mathcal{T}$ si, et seulement si, f est une cofibration dans $\mathcal{QT}$.*

Dans le cas où A est un fermé de l'espace quasi-topologique E , on peut trouver des conditions commodes pour vérifier si l'inclusion $\iota: A \rightarrow E$ est une cofibration:

2.9 Proposition. *Soit A fermé dans l'espace quasi-topologique E . Alors, l'inclusion $\iota: A \rightarrow E$ est une cofibration si, et seulement si, il existe des applications continues $\phi: E \rightarrow [0,1]$ et $D: E \times [0,1] \rightarrow E$ telles que:*

- a) $D(x,0) = x$, $x \in E$;
- b) $D(a,t) = a$, $a \in A$, $t \in I$;
- c) $x \in A$ si, et seulement si, $\phi(x) = 0$;
- d) $\phi(x) < 1 \Rightarrow D(x,t) \in A$ pour $t \geq \phi(x)$.

Démonstration: Supposons que $f: A \rightarrow E$ est une cofibration. Soit (corollaire 2.6) une rétraction $H: E \times I \rightarrow E \times \{0\} \cup A \times I$; en posant $H(x,t) = (D(x,t), h(x,t))$, on obtient deux applications continues

$$D: E \times I \rightarrow E, \quad h: E \times I \rightarrow I.$$

Soit $\phi: E \rightarrow I$ l'application définie par $\phi(x) = \sup_{t \in I} |t - h(x,t)|$; ϕ est continue parce qu'elle est la composée de l'application

$x \mapsto (t \mapsto |t - h(x, t)|)$ qui est continue de E vers $\text{Hom}(I, I)$ avec l'application continue de $\text{Hom}(I, I)$ vers I , $g \mapsto \sup_{t \in I} g(t)$ (Proposition I 5.12). Si $x \in A$ on a, $\forall t$, $H(x, t) = (x, t)$, donc $h(x, t) = t$, et $\phi(x) = 0$. Si $\phi(x) < 1$, alors, pour $t > \phi(x)$, on aura $h(x, t) \neq 0$, d'où $D(x, t) \in A$ et, si $T_x = \{t / D(x, t) \in A\}$, T_x , fermé dans $[0, 1]$ et contenant $] \phi(x), 1]$, contiendra $[\phi(x), 1]$, c'est-à-dire, $D(x, t) \in A$ pour $t \geq \phi(x)$. Comme $H(x, 0) = (x, 0)$, on a $D(x, 0) = x$. Si $\phi(x) = 0$, on a déjà vu que $D(x, 0) \in A$, donc $x \in A$. Enfin, si $a \in A$, l'égalité $H(a, t) = (a, t)$ entraîne $D(a, t) = a$.

Supposons réciproquement l'existence des applications continues ϕ et D , vérifiant les conditions de l'énoncé. Définissons une application $H: E \times I \rightarrow E \times I$ par:

$$H(x, t) = \begin{cases} (D(x, t), 0) , & t \leq \phi(x) \\ (D(x, \phi(x)), t - \phi(x)) , & t \geq \phi(x) ; \end{cases}$$

H est continue (Propositions I 7.7 et I 7.8), car il en est ainsi de ses restrictions aux sous-ensembles fermés de $E \times I$ définis par $\{t \leq \phi(x)\}$ et $\{t \geq \phi(x)\}$ respectivement (par exemple, le premier est l'image réciproque par l'application continue $E \times I \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto \phi(x) - t$, de l'ensemble fermé $[0, +\infty[$). On a $H(E \times I) \subset E \times \{0\} \cup A \times I$, $H(x, 0) = (x, 0)$ et, pour $a \in A$, $\phi(a) = 0$ entraîne $H(a, t) = (a, t)$, ce qui montre que H est une rétraction de $E \times I$ sur $E \times \{0\} \cup A \times I$, et $f: A \rightarrow E$ est donc une cofibration.

2.10 Remarque. Remarquons que, dans la démonstration de la condition suffisante de la proposition antérieure, on n'a pas utilisé la condition b) et, de la condition c), on n'a utilisé que la partie $x \in A \Rightarrow \phi(x) = 0$.

Remarquons aussi que, dans le cas topologique, la proposition antérieure est d'habitude présentée en exigeant que les applications ϕ et D obéissent aux conditions a), b), c) et à la condition, plus faible que d):

$$\phi(x) < 1 \Rightarrow D(x, 1) \in A .$$

Dans le cas quasi-topologique la proposition sous cette forme (voir, par exemple, [14]) ne paraît pas être valable.

2.11 Proposition. Soient les espaces quasi-topologiques X , Y

et les fermés $A \subset X$, $B \subset Y$, tels que les inclusions $A \rightarrow X$, $B \rightarrow Y$ soient des cofibrations. Soit $C = A \times_Y U \times_X B$. Alors les inclusions

$$A \times B \rightarrow C, \quad C \rightarrow X \times Y \quad \text{et} \quad A \times B \rightarrow X \times Y$$

sont des cofibrations.

Démonstration: Il suffit de le démontrer pour les deux premières, car la troisième est leur composée.

En ce qui concerne l'inclusion $C \rightarrow X \times Y$, on remarque déjà qu'on a $C = p_1^{-1}(A) \cap p_2^{-1}(B)$ (où $p_1: X \times Y \rightarrow X$, $p_2: X \times Y \rightarrow Y$ sont les projections continues), donc C est fermé dans $X \times Y$. Soient les applications continues $D: X \times I \rightarrow X$, $\phi: X \rightarrow I$, $D': Y \times I \rightarrow Y$, $\phi': Y \rightarrow I$ vérifiant les conditions de la proposition 2.9. Soit $\phi'': Y \times I \rightarrow I$ définie par

$$\phi''(x, y) = \min(\phi(x), \phi'(y)) = \frac{1}{2}(\phi(x) + \phi'(y) - |\phi(x) - \phi'(y)|);$$

ϕ'' est continue. Soit $D'': X \times Y \times I \rightarrow X \times Y$,

$$(x, y, t) \mapsto (D(x, \sqrt{\phi''(x, y)}t), D'(y, \sqrt{\phi''(x, y)}t));$$

on voit que D'' est continue. On a $(x, y) \in C$ si, et seulement si, $\phi''(x, y) = 0$; $D''(x, y, t) = (x, y)$ si $t = 0$ ou $(x, y) \in C$; et, si $\phi''(x, y) < 1$ et $t \geq \phi''(x, y)$, on aura, par exemple, $\phi(x) \leq \phi'(y)$ et alors $\phi(x) < 1$, $\sqrt{\phi''(x, y)}t \geq \phi''(x, y) = \phi(x)$, d'où $D(x, \sqrt{\phi''(x, y)}t) \in A$ et $D''(x, y, t) \in C$. D'après la proposition 2.9, ceci entraîne qu'on a une cofibration.

En ce qui concerne l'inclusion $A \times B \rightarrow C$, on commence par remarquer que, $A \times B$ étant fermé dans $X \times Y$, il est fermé dans C . Soient les rétractions (corollaire 2.6) $H: X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$, $K: Y \times I \rightarrow Y \times \{0\} \cup B \times I$,

$$H(x, t) = (r_1(x, t), r_2(x, t)), \quad K(y, t) = (s_1(y, t), s_2(y, t)).$$

Définissons $L: C \times I \rightarrow C \times \{0\} \cup A \times B \times I$ en posant,

$$L(x, y, t) = \begin{cases} (r_1(x, t), x, r_2(x, t)), & \text{si } x \in X, y \in B \\ (x, s_1(y, t), s_2(y, t)), & \text{si } x \in A, y \in Y. \end{cases}$$

L est bien définie, car, si $x \in A$, $y \in B$, on a $r_1(x, t) = x$, $s_1(y, t) = y$, $r_2(x, t) = s_2(y, t) = t$, et L est continue, car $X \times I \times I$ et $A \times Y \times I$, étant fermés dans $X \times Y \times I$, sont fermés dans $C \times I$. On voit alors que L est une rétraction, ce qui montre qu'on a une cofibration.

3. Les fibrations dans $\mathcal{CT}$

Comme dans le paragraphe 2, la catégorie $\mathcal{CT}$ étant $\mathcal{r}_{\mathcal{CT}}$ -dominée, on sait définir les fibrations dans $\mathcal{CT}$. En tenant compte de la carac-

térisation universelle de la quasi-topologie de la convergence locale (I 3.), on voit, comme dans la proposition 2.1, que:

3.1 Proposition. Soient E et E' des espaces quasi-topologiques, soit $f: E \rightarrow E'$ une application continue. Alors f est une fibration si, et seulement si, quels que soient l'espace quasi-topologique E'' et les applications continues $g: E'' \rightarrow E$, $H: E'' \times I \rightarrow E'$ telles que $H(x'', 0) = f(g(x''))$, il existe une application continue $G: E'' \times I \rightarrow E$ telle que $G(x'', 0) = g(x'')$ et $f(G(x'', t)) = H(x'', t)$.

Dans ce qui suit, on adapte aux espaces quasi-topologiques la théorie des fibrations entre espaces topologiques, telle qu'elle est faite, par exemple, dans [16]. On désigne par E et B deux espaces quasi-topologiques.

3.2 Définition. Soient les espaces quasi-topologiques E , B , soit $p: E \rightarrow B$ une application continue. Soit

$$\bar{E} = \{(e, \omega) \in E \times \text{Hom}(E, I) / p(e) = \omega(0)\}.$$

Soit $\bar{p}: \text{Hom}(E, I) \rightarrow \bar{E}$ l'application continue $\bar{p}\omega \mapsto (\bar{p}\omega(0), p\bar{p}\omega)$. On appelle fonction de relèvement de p une application $\lambda: \bar{E} \rightarrow \text{Hom}(E, I)$ telle que $\bar{p}\lambda = 1_{\bar{E}}$.

3.3 Proposition. Une application continue $p: E \rightarrow B$ est une fibration si, et seulement si, elle admet une fonction de relèvement.

Démonstration: Supposons que p est une fibration. Considérons les applications continues $f: \bar{E} \rightarrow E$, $G: \bar{E} \times I \rightarrow E$ définies par

$$f(e, \omega) = e, \quad G((e, \omega), t) = \omega(t);$$

on a $G((e, \omega), 0) = \omega(0) = p(e) = p(f(e, \omega))$ et il existe donc $F: \bar{E} \times I \rightarrow E$ tel que

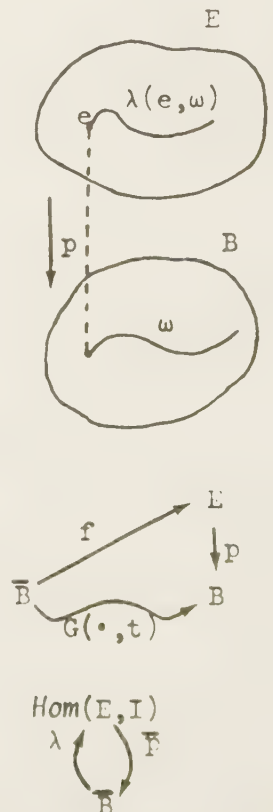
$$F((e, \omega), 0) = f(e, \omega) \quad \text{et} \quad p(F((e, \omega), t)) = G((e, \omega), t).$$

On peut définir $\lambda: \bar{E} \rightarrow \text{Hom}(E, I)$ continue par

$$\lambda((e, \omega))(t) = G((e, \omega), t)$$

et on voit que λ est une fonction de relèvement.

Supposons réciproquement qu'il existe une fonction de relèvement $\lambda: \bar{E} \rightarrow \text{Hom}(E, I)$. Soit l'espace quasi-topologique E' et les applications continues $f: E' \rightarrow E$, $G: E' \times I \rightarrow E$, avec $G(x', 0) = p(f(x'))$. On peut définir une application continue $\xi: E' \rightarrow \text{Hom}(B, I)$ par $\xi(x')(t) = G(x', t)$ et



une application continue $\bar{\xi}:E' \rightarrow \bar{E}$ par $\bar{\xi}(x') = (f(x'), \xi(x'))$; posant

$$\eta = \lambda \circ \bar{\xi}:E' \rightarrow \text{Hom}(E, I) ,$$

on peut définir une application continue $F:E' \times I \rightarrow E$ par

$$F(x', t) = \eta(x')(t) \text{ et on voit que}$$

$$p(F(x', t)) = G(x', t) \text{ et } F(x', 0) = f(x') ,$$

ce qui montre que p est une fibration.

Les propositions antérieures étant encore valables pour les fibrations dans la catégorie p_{QT} -dominée T (car, si B et E sont des espaces topologiques, il en est de même pour $\text{Hom}(B, I)$, $\text{Hom}(E, I)$ et $\bar{E}$) , on a le corollaire suivant qui, a priori, n'était valable que dans un sens :

3.4 Corollaire. Si E et B sont des espaces topologiques et si $p:E \rightarrow B$ est une application continue, alors p est une fibration dans T si, et seulement si, p est une fibration dans QT .

Une fonction de relèvement pour $p:E \rightarrow B$ associe, à chaque $e \in E$ et à chaque chemin ω dans B d'origine $p(e)$, un chemin dans E d'origine e qui se projette sur ω . Pour la démonstration du théorème de Hurewicz, on a besoin d'un résultat plus fort, où un paramètre $s \in I$ arbitraire remplace le paramètre 0.

3.5 Définition. Soit $p:E \rightarrow B$ une application continue. Etant donné $W \subset \text{Hom}(B, I)$, on appelle *fonction de relèvement généralisée* sur W une application continue $\Lambda:\tilde{W} \rightarrow \text{Hom}(E, I)$, où

$$\tilde{W} = \{(e, \omega, s) \in E \times \text{Hom}(B, I) \times I \mid \omega \in W, p(e) = \omega(s)\} ,$$

telle que $p(\Lambda(e, \omega, s)(t)) = \omega(t)$ et $\Lambda(e, \omega, s)(s) = e$.

3.6 Proposition. $p:E \rightarrow B$ admet une fonction de relèvement si, et seulement si, il admet une fonction de relèvement généralisée sur $\text{Hom}(B, I)$.

Démonstration: Supposant que Λ est une fonction de relèvement généralisée sur $\text{Hom}(B, I)$, on obtient une fonction de relèvement $\lambda:\bar{B} \rightarrow \text{Hom}(E, I)$ de p en posant $\lambda(e, \omega) = \Lambda(e, \omega, 0)$.

Supposons réciproquement qu'il existe une fonction de relèvement $\lambda:\bar{B} \rightarrow \text{Hom}(E, I)$ de p . Pour chaque $\omega \in \text{Hom}(B, I)$ et $s \in I$, soient ω^s , ω_s dans $\text{Hom}(B, I)$ définis par :

$$\omega^s(t) = \begin{cases} \omega(s+t), & 0 \leq t \leq 1-s \\ \omega(1), & 1-s \leq t \leq 1 \end{cases}, \quad \omega_s(t) = \begin{cases} \omega(s-t), & 0 \leq t \leq s \\ \omega(0), & s \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

On a des applications continues $\text{Hom}(B, I) \times I \rightarrow \text{Hom}(B, I)$, $(\omega, s) \mapsto \omega^s$ et $(\omega, s) \mapsto \omega_s$. On définit alors $\Lambda: \widetilde{\text{Hom}}(B, I) \rightarrow \text{Hom}(E, I)$ par

$$\Lambda(e, \omega, s)(t) = \begin{cases} \lambda(e, \omega^s)(t-s), & s \leq t \leq 1 \\ \lambda(e, \omega_s)(s-t), & 0 \leq t \leq s \end{cases}$$

et on voit que Λ est continue et constitue une fonction de relèvement généralisé de p sur $\text{Hom}(B, I)$.

3.7 Proposition. Soit $p: E \rightarrow B$ une fibration, soient $B' \subset B$, $E' = p^{-1}(B')$ et $p': E' \rightarrow B'$ la restriction de p . Alors p' est une fibration.

Démonstration: Les applications sous-jacentes à $i: B' \rightarrow B$ et $p: E \rightarrow B$ ont un produit fibré $\underline{E}'$ dans Ens pour les projections $p': \underline{E}' \rightarrow \underline{B}'$, $i': \underline{E}' \rightarrow \underline{B}$ (inclusion) et, comme le foncteur $p_{QT}: QT \rightarrow \text{Ens}$ est compatible avec les produits fibrés, on voit (raisonnement catégorique) qu'on a encore un produit fibré dans QT si on considère sur $\underline{E}'$ et $\underline{B}'$ les quasi-topologies induites. La proposition résulte alors de la proposition 1.13.

$$\begin{array}{ccc} \underline{E}' & \xrightarrow{i} & \underline{B} \\ \downarrow p' & & \downarrow p \\ \underline{B}' & \xrightarrow{i} & \underline{B} \end{array}$$

Le théorème de Hurewicz, qu'on va démontrer à partir de maintenant, nous dit que, sous certaines conditions, une application continue $p: E \rightarrow B$, qui est "localement" une fibration, est une fibration.

Etant donné l'espace quasi-topologique E , $\underline{X} \subset \underline{E}$ est appelé un ouvert numérique s'il existe une application continue $f: E \rightarrow [0, 1]$ telle que $\underline{X} = \{x \in E / f(x) \neq 0\}$. $\underline{X}$ est alors un ouvert de E . Dans un espace topologique métrisable tout ouvert est numérique. Les théorèmes de partition de l'unité nous permettent d'affirmer:

3.8 Proposition. Si E est un espace topologique normal et $(U_i)_{i \in J}$ un recouvrement ouvert localement fini, il existe un recouvrement $(V_i)_{i \in J}$ localement fini par des ouverts numériques, avec $V_i \subset U_i$.

3.9 Proposition. Si E est un espace topologique paracompact et séparé et $(U_i)_{i \in J}$ un recouvrement ouvert, il existe un recouvrement localement fini $(V_i)_{i \in J}$ par des ouverts numériques avec $V_i \subset U_i$.

Etant donné l'espace quasi-topologique E , une famille $(f_i)_{i \in J}$ de fonctions continues $E \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *sommable* si, en posant $A_i = \{x \in E / f_i(x) \neq 0\}$, la famille $(A_i)_{i \in J}$ est localement finie. Si la famille $(f_i)_{i \in J}$ est sommable, alors, en particulier, pour chaque $x \in E$, il n'y a qu'un nombre fini d'indices i tels que $f_i(x) \neq 0$ et la somme $\sum_{i \in J} f_i(x)$ est donc bien définie.

3.10 Proposition. Si la famille de fonctions continues $f_i: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in J$) est sommable, alors l'application $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_{i \in J} f_i(x)$ est continue.

Démonstration: Pour chaque $x \in E$ et $F \xrightarrow{E} x$, il existe $A_{x,F} \in F$ tel que toutes les f_i , sauf un nombre fini, soient nulles sur $A_{x,F}$, et on peut déjà supposer $x \in A_{x,F}$ (en remplaçant F par $F \cap x \xrightarrow{E} x$). Alors, la famille de tous les $A_{x,F}$ est finalisante et $f|_{A_{x,F}}: A_{x,F} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue (somme finie d'applications continues), ce qui (Proposition I 7.8) entraîne que $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

3.11 Lemme de Dold. Soient les ensembles J_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), avec $J_n \subset J_{n+1}$, soit $J = \bigcup_n J_n$, soient E un espace quasi-topologique et $(f_i)_{i \in J}$ une famille d'applications continues de E dans $\mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[\subset \mathbb{R}$) telle que:

1) Pour chaque n la famille $(f_i)_{i \in J_n}$ est sommable.

2) Pour chaque $x \in E$, il existe $i \in J$ avec $f_i(x) \neq 0$.

Il existe alors des fonctions $(g_i)_{i \in J}$ continues de E dans $\mathbb{R}^+$ telles que:

A) $(g_i)_{i \in J}$ est une famille sommable.

B) Pour chaque x , $g_i(x) \leq f_i(x)$.

C) Pour chaque x il existe $i \in J$ tel que $g_i(x) \neq 0$.

Démonstration: Soit $f'_i: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $f'_i(x) = \min(f_i(x), 1)$; la famille $(f'_i)_{i \in J}$ obéit encore aux conditions 1) et 2) de l'énoncé (les f'_i sont continues, car $f'_i(x) = \frac{1}{2}(f_i(x) + 1 - |f_i(x) - 1|)$). Notons $J_0 = \emptyset$ et, pour chaque $n \geq 0$, $F_n(x) = \sum_{i \in J_n} f'_i(x)$ ($F_0(x) = 0$); d'après la proposition antérieure, $F_n: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ est continue. Pour chaque $i \in J$, il existe n unique tel que $i \in J_n - J_{n-1}$; notons

$$g_i(x) = \sup(0, f'_i(x) - nF_{n-1}(x));$$

les $g_i: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ sont encore continues (car $g_i(x) = \frac{1}{2}[f'_i(x) - nF_{n-1}(x) +$

$+|f'_i(x) - nF_{n-1}(x)|]$) et la propriété B) est immédiate. Etant donné $x \in E$, soit n_0 le premier n tel que $F_n(x) \neq 0$ (étant donné $i \in J$ avec $f'_i(x) \neq 0$, si $i \in J_n$ on aura $F_n(x) \neq 0$); il existe $i \in J_{n_0}$ avec $f'_i(x) \neq 0$ et alors $i \notin J_{n_0-1}$, donc $g_i(x) = f'_i(x) \neq 0$, ce qui démontre C). Vérifions enfin A): Si $G \xrightarrow{E} x$, on a $F_{n_0}(x) = \delta > 0$, donc, $F_{n_0}: E \rightarrow R^+$ étant continue, $F_{n_0}(G) \xrightarrow{R} \delta$ et il existe $D \in G$ avec $F_{n_0}(y) > \frac{\delta}{2} \forall y \in D$; si n_1 , supposé déjà $> n_0$, est tel que $n_1 \frac{\delta}{2} > 1$, on aura, pour $i \notin J_{n_1}$ (donc $i \in J_n - J_{n-1}$ pour $n > n_1$), pour chaque $y \in D$, $f'_i(y) - nF_{n-1}(y) \leq 1 - n_1 \frac{\delta}{2} < 0$, donc $g_i(y) = 0$. En tenant compte maintenant du fait que $(f'_i)_{i \in J_{n_1}}$ est une famille sommable, on voit qu'il existe $D' \in G$, $i_1, \dots, i_m \in J_{n_1}$ tels que $f'_i(y) = 0$ pour $y \in D'$, $i \in J_{n_1}$, $i \neq i_1, \dots, i_m$, donc $DD' \in G$ avec, pour $y \in DD'$, $g_i(y) = 0$ si $i \in J$, $i \neq i_1, \dots, i_m$, ce qui montre que $(g_i)_{i \in J}$ est une famille sommable.

On revient maintenant au théorème d'Hurewicz, précédé de deux lemmes.

3.12 Lemme. Soit $p: E \rightarrow B$ une application continue, soit $(W_j)_{j \in J}$ un recouvrement localement fini de $\text{Hom}(B, I)$ par des ouverts numériques tel que, pour chaque $j \in J$, il existe une fonction de relèvement généralisée de p sur W_j . Alors p est une fibration.

Démonstration: 1) Pour chaque $j \in J$, soit une application continue $f_j: \text{Hom}(B, I) \rightarrow [0, 1]$ telle que $f_j(\omega) \neq 0$ si, et seulement si, $\omega \in W_j$; la famille des fonctions $(f_j)_{j \in J}$ est évidemment sommable. Pour chaque $\alpha \in J$, soit $W_\alpha = \bigcup_{j \in \alpha} W_j$; soit $f_\alpha: \text{Hom}(B, I) \rightarrow R^+$ l'application $\sum_{j \in \alpha} f_j$ (qui est continue d'après 3.10); on a encore $f_\alpha(\omega) \neq 0 \Leftrightarrow \omega \in W_\alpha$.

On définit

$$\bar{W}_\alpha = \{(e, \omega) \in \bar{E} / \omega \in W_\alpha\}$$

pour $\alpha \in J$. Considérons la classe $\mathcal{D}$ des couples (α, λ_α) , où $\alpha \in J$ et où $\lambda_\alpha: \bar{W}_\alpha \rightarrow \text{Hom}(E, I)$ est une application continue avec

$$\lambda_\alpha(e, \omega)(0) = e \text{ et } p(\lambda_\alpha(e, \omega)(t)) = \omega(t).$$

Définissons une relation $<$ sur $\mathcal{D}$ par $(\alpha, \lambda_\alpha) < (\beta, \lambda_\beta)$ si, et seulement

si $\alpha \subset \beta$ et $\lambda_\alpha(e, \omega) = \lambda_\beta(e, \omega)$, pour tout $(e, \omega) \in \bar{W}_\alpha$ tel que $f_\alpha(\omega) = f_\beta(\omega)$ (c'est-à-dire tel que $\omega \notin W_j$ pour tout $j \in \beta - \alpha$). On voit facilement que $\prec$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{D}$.

2) $\mathcal{D}$ est non vide, car on peut considérer $\alpha = \emptyset$ et

$$\lambda_\alpha: \emptyset \rightarrow \text{Hom}(E, I)$$

l'unique application possible. On va voir, en appliquant l'axiome de Zorn, que $\mathcal{D}$ admet un élément maximal. Soit donc une chaîne $\{(\alpha_\ell, \lambda_{\alpha_\ell})\}$ ($\ell \in L$). Posons $\alpha = \bigcup_{\ell \in L} \alpha_\ell$. Pour chaque $(e, \omega) \in \bar{W}_\alpha$ il existe $\ell_1 \in L$ tel que $f_{\alpha_{\ell_1}}(\omega) = f_\alpha(\omega) \quad \forall \ell \geq \ell_1$ (en effet on a $\omega \notin W_j$

$\forall j \neq j_1, \dots, j_n$, et, si l'on choisit ℓ_1 tel que tout $j_1, \dots, j_n$ qui est dans α soit aussi dans α_{ℓ_1} , ℓ_1 vérifie les conditions voulues) et on a $\omega \in W_{\alpha_{\ell_1}}$ (si $j_0 \in \alpha$ est tel que $f_{j_0}(\omega) \neq 0$,

on a $j_0 \in \alpha_{\ell_0}$; avec $\ell_2 = \max(\ell_0, \ell_1)$, on obtient

$$0 < f_{j_0}(\omega) \leq f_{\alpha_{\ell_0}}(\omega) \leq f_{\alpha_{\ell_2}}(\omega) = f_{\alpha_{\ell_1}}(\omega),$$

d'où $\omega \in W_{\alpha_{\ell_1}}$; donc $\forall \ell \geq \ell_1$, $\lambda_{\alpha_\ell}(e, \omega) = \lambda_{\alpha_{\ell_1}}(e, \omega)$. On définit

alors $\lambda_\alpha(e, \omega) = \lambda_{\alpha_{\ell_1}}(e, \omega)$, définition qui ne dépend pas du ℓ_1 choisi

dans les conditions énoncées. $\lambda_\alpha: \bar{W}_\alpha \rightarrow \text{Hom}(E, I)$ est continue. En effet, si $F \xrightarrow{\pi_\alpha} (e, \omega)$, on a $F \supset F'/\bar{W}_\alpha$, avec $F' \rightarrow (e, \omega)$ dans $E \times \text{Hom}(E, I)$,

de sorte que $F' \supset G \times F$, $G \xrightarrow{\pi} e$, $F \xrightarrow{\text{Hom}(E, I)} \omega$, et il existe $A \in F$, $j'_1, \dots, j'_m$, avec $A \cap W_{j'_j} = \emptyset$ pour $j \neq j'_1, \dots, j'_m$; choisissant ℓ'_1 tel que tout $j'_1, \dots, j'_m$ qui soit dans α soit aussi dans $\alpha_{\ell'_1}$, on

obtient $A \cap W_\alpha \subset W_{\alpha_{\ell'_1}}$, $(\underline{E} \times A) \cap \bar{W}_\alpha \in F$; $\forall (e', \omega') \in (\underline{E} \times A) \cap \bar{W}_\alpha$ (alors

$\omega' \in W_{\alpha_{\ell'_1}}$) on a $\lambda_{\alpha_{\ell'_1}}(e', \omega') = \lambda_\alpha(e', \omega')$, donc $\lambda_\alpha / (\underline{E} \times A) \cap \bar{W}_\alpha$ est con-

tinue, ce qui (on peut déjà supposer $(e, \omega) \in (\underline{E} \times A) \cap \bar{W}_\alpha$, en remplaçant Γ par $\Gamma \cap (e, \omega)^\varepsilon$) entraîne que λ_α est continue (Proposition I 7.8).

On voit immédiatement que $(\alpha, \lambda_\alpha) \in \mathcal{D}$; pour chaque $\ell \in L$, si $f_\alpha(\omega) = f_{\alpha_\ell}(\omega)$, pour tout $\ell' \geq \ell$ on a $f_\alpha(\omega) \geq f_{\alpha_{\ell'}}(\omega) \geq f_{\alpha_\ell}(\omega)$, donc $f_{\alpha_{\ell'}}(\omega) = f_{\alpha_\ell}(\omega)$ et, par définition, $\lambda_\alpha(e, \omega) = \lambda_{\alpha_\ell}(e, \omega)$, ce qui montre que $(\alpha_\ell, \lambda_{\alpha_\ell}) < (\alpha, \lambda_\alpha)$; c'est-à-dire (α, λ_α) est un majorant de la

chaîne.

3) Soit donc (β, λ_β) un élément maximal de $\mathcal{D}$. Notre lemme sera démontré si on voit que $\beta = J$, car λ_β est alors une fonction de relèvement de p . Supposons $\beta \neq J$; soit $j_0 \in J - \beta$, $\gamma = \beta \cup \{j_0\}$. Soit $g: W_\gamma \rightarrow [0, 1]$ l'application continue $g(\omega) = \frac{f_\beta(\omega)}{f_\gamma(\omega)}$ ($f_\beta(\omega) \leq f_\gamma(\omega) \neq 0$). On a $g(\omega) \neq 0 \Leftrightarrow \omega \in W_\beta$, $g(\omega) \neq 1 \Leftrightarrow \omega \in W_{j_0}$ ($f_\gamma(\omega) = f_\beta(\omega) + f_{j_0}(\omega)$). Soit Λ une fonction de relèvement généralisée sur W_{j_0} ; définissons

$$\lambda_\gamma: \bar{W}_\gamma \rightarrow \text{Hom}(E, I) \text{ par}$$

$$\lambda_\gamma(e, \omega)(t) = \begin{cases} \Lambda(e, \omega, 0)(t) & , & 0 \leq g(\omega) \leq \frac{1}{3} \\ \lambda_\beta(e, \omega)(t) & , & 0 \leq t \leq 3g(\omega) - 1 \\ \Lambda(\lambda_\beta(e, \omega)(3g(\omega) - 1), \omega, 3g(\omega) - 1)(t), & 3g(\omega) - 1 \leq t \leq 1 \\ \lambda_\beta(e, \omega)(t) & , & \frac{2}{3} \leq g(\omega) \leq 1 \end{cases} \frac{1}{3} \leq g(\omega) \leq \frac{2}{3}$$

On voit que λ_γ est continue, que $(\gamma, \lambda_\gamma) \in \mathcal{D}$ et, si $(e, \omega) \in \bar{W}_\beta$ et $f_\beta(\omega) = f_\gamma(\omega)$, on a $g(\omega) = 1$, donc $\lambda_\gamma(e, \omega) = \lambda_\beta(e, \omega)$, ce qui entraîne $(\beta, \lambda_\beta) < (\gamma, \lambda_\gamma)$ avec $\beta \neq \gamma$; ceci contredit la maximalité de (β, λ_β) .

3.13 Lemme. Soit $p: E \rightarrow B$ continue, soient $U_1, \dots, U_k \subset B$ tels qu'il existe des fonctions de relèvement généralisées Λ_i de p sur $\text{Hom}(U_i, I)$ (sous-espace de $\text{Hom}(B, I)$). Alors, il existe une fonction de relèvement généralisée sur

$$W = \{ \omega \in \text{Hom}(B, I) / \omega(\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}) \in U_i \}.$$

Démonstration: 1) Pour chaque $i = 1, 2, \dots, k$, soit

$$\xi_i: \text{Hom}(B, I) \rightarrow \text{Hom}(B, I)$$

l'application qui associe, à $\omega \in \text{Hom}(B, I)$, $\xi_i(\omega)$ défini par

$$\xi_i(\omega)(t) = \begin{cases} \omega(\frac{i-1}{k}) & , & 0 \leq t \leq \frac{i-1}{k} \\ \omega(t) & , & \frac{i-1}{k} \leq t \leq \frac{i}{k} \\ \omega(\frac{i}{k}) & , & \frac{i}{k} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

On voit que ξ_i est continue et, si $\omega \in W$, $\xi_i(\omega) \in \text{Hom}(U_i, I)$.

2) Supposant fixé $n \in \{1, 2, \dots, k\}$, définissons, pour chaque $(e, \omega, s) \in \bar{W}_n = \{(e, \omega, s) \in \bar{W} / \frac{n-1}{k} \leq s \leq \frac{n}{k}\}$, les éléments e_i , $i = 1, \dots, k$, par:

$$e_{n-1} = \Lambda_n(e, \xi_n(\omega), s)(\frac{n-1}{k}), \quad e_n = \Lambda_n(e, \xi_n(\omega), s)(\frac{n}{k})$$

et, par induction (en vérifiant simultanément que $p(e_i) = \omega(\frac{i}{k})$):

$$e_i = \Lambda_{i+1}(e_{i+1}, \xi_{i+1}(\omega), \frac{i+1}{k})(\frac{i}{k}), \quad i < n-1,$$

$$e_i = \Lambda_i(e_{i-1}, \xi_i(\omega), \frac{i-1}{k})(\frac{i}{k}), \quad i > n.$$

On voit, par induction, que, pour chaque i , l'application $\tilde{W}_n \rightarrow E$, $(e, \omega, s) \mapsto e_i$, est continue. Encore avec n fixé, définissons, pour chaque $(e, \omega, s) \in \tilde{W}_n$ et pour chaque $t \in [0, 1]$,

$$\bar{e}_t = \begin{cases} \Lambda_i(e_i, \xi_i(\omega), \frac{i}{k})(t) & , \quad \frac{i-1}{k} \leq t \leq \frac{i}{k} \quad i \leq n-1 \\ \Lambda_n(e, \xi_n(\omega), s)(t) & , \quad \frac{n-1}{k} \leq t \leq \frac{n}{k} \\ \Lambda_{i+1}(e_i, \xi_{i+1}(\omega), \frac{i}{k})(t) & , \quad \frac{i}{k} \leq t \leq \frac{i+1}{k} \quad n \leq i \end{cases}$$

On remarque que $p(\bar{e}_t) = \omega(t)$ et $\bar{e}_s = e$. On a une application continue $\tilde{W}_n \rightarrow \text{Hom}(E, I)$ qui associe $(t \mapsto \bar{e}_t)$ à (e, ω, s) .

3) En remarquant par une discussion que, si $(e, \omega, s) \in \tilde{W}_n \cap \tilde{W}_{n+1}$, c'est-à-dire, si $s = \frac{n}{k}$, les valeurs associées à (e, ω, s) des e_i et $\bar{e}_t$ dans $\tilde{W}_n$ et $\tilde{W}_{n+1}$ sont les mêmes, on voit qu'on peut définir une application continue $\Lambda: \tilde{W} \rightarrow \text{Hom}(E, I)$ par $\Lambda(e, \omega, s)(t) = \bar{e}_t$; on a

$$\Lambda(e, \omega, s)(s) = e, \quad p(\Lambda(e, \omega, s)(t)) = \omega(t),$$

c'est-à-dire Λ est une fonction de relèvement généralisée sur W .

3.14 Théorème de Hurewicz. Soit $p: E \rightarrow B$ une application continue et $(U_j)_{j \in J}$ un recouvrement localement fini de B par des ouverts numériques, tels que $\forall j \in J$ la restriction $p_j: p^{-1}(U_j) \rightarrow U_j$ de p soit une fibration. Alors p est une fibration.

Démonstration: 1) Pour chaque $k \geq 1$, $j_1, \dots, j_k \in J$, soit

$$W_{j_1, \dots, j_k} = \{ \omega \in \text{Hom}(E, I) / \omega((\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k})) \subset U_{j_i} \}.$$

En tenant compte du fait (I 3.2) que $\text{Hom}(U_j, I)$ est un sous-espace de $\text{Hom}(E, I)$, il résulte des propositions 3.3 et 3.6 et du lemme antérieur qu'il existe une fonction de relèvement généralisée

$\Lambda_{j_1, \dots, j_k}$ de p sur $W_{j_1, \dots, j_k}$.

2) Montrons que, pour k fixé, la famille des $W_{j_1, \dots, j_k}$ est localement finie dans $\text{Hom}(E, I)$. Or, si $F: \text{Hom}(E, I) \rightarrow W$, on a, pour chaque $t \in [0, 1]$, $F(V_t) \xrightarrow{p} \omega(t)$, et il existe donc $A_t \in F$, $\epsilon_t > 0$, avec $A_t(V(t, \epsilon_t))$ ne rencontrant qu'un nombre fini des U_j ($V(t, \epsilon_t)$ est la boule ouverte de rayon ϵ_t et de centre t); on a alors un recouvrement ouvert $(V(t, \epsilon_t))_{t \in [0, 1]}$ de $[0, 1]$, d'où l'on peut extraire un sous-recouvrement fini correspondant aux valeurs $t_1, \dots, t_m$, et, posant $A = A_{t_1} \cap \dots \cap A_{t_m} \in F$, il n'y a qu'un nombre fini de U_j , $U_{j_1}, \dots, U_{j_\ell}$, rencontrant $A(I)$ (ceux qui rencontrent l'un des $A_{t_i}(V(t_i, \epsilon_{t_i}))$); il en résulte que tout $W_{j_1, \dots, j_k}$ qui rencontre A

vérifie $j'_1, \dots, j'_k \in \{j_1, \dots, j_k\}$; il n'y en a donc qu'un nombre fini.

3) Pour chaque k , la famille des $W_{j_1, \dots, j_k}$, k variable sous la condition $k' \leq k$, est encore localement finie. En effet, si $F \xrightarrow{\text{Hom}(B, I)} \omega$, pour chaque k' il existe $A_{k'} \in F$ ne rencontrant qu'un nombre fini des $W_{j_1, \dots, j_{k'}}$ et alors $A_1 \cap \dots \cap A_k \in F$ ne rencontre qu'un nombre fini des $W_{j_1, \dots, j_k}$, $k' \leq k$.

Remarquons que, cependant, rien ne nous affirme que la famille des $W_{j_1, \dots, j_k}$, k variable sans restrictions, soit encore localement finie.

4) Pour chaque $j \in J$, soit $f_j: B \rightarrow [0, 1]$ continue, telle que $f_j(x) \neq 0$ si, et seulement si, $x \in U_j$. Pour chaque $i \in \{1, \dots, k\}$ soit $\iota_i: [\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}] \rightarrow [0, 1]$ l'inclusion canonique. Etant donné $j_1, \dots, j_k$ dans J , soit $\varepsilon_{j_1, \dots, j_k}: \text{Hom}(B, I) \rightarrow [0, 1]$ défini par

$$\varepsilon_{j_1, \dots, j_k}(\omega) = \min_{i=1, \dots, k} \left(\min_{t \in [\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}]} f_{j_i} \circ \omega \circ \iota_i(t) \right).$$

En tenant compte du fait que, si X est un espace quasi-topologique et si $h_1, \dots, h_k: X \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues, il en est de même pour

$$\min(h_1, \dots, h_k): X \rightarrow \mathbb{R}$$

(si $k \leq 2$ c'est trivial; cela se déduit, si $k = 2$ de l'égalité

$$\min(h_1, h_2) = \frac{1}{2}(h_1 + h_2 - |h_1 - h_2|),$$

si $k > 2$ par induction); en tenant compte aussi de I 5.12, on voit que $\varepsilon_{j_1, \dots, j_k}$ est continue. On a $\varepsilon_{j_1, \dots, j_k}(\omega) \neq 0$ si, et seulement si, $\omega \in W_{j_1, \dots, j_k}$.

5) Etant donné $\omega \in \text{Hom}(B, I)$ on voit que, pour chaque $t \in [0, 1]$, $\omega(t) \in U_{j_t}$, donc, U_{j_t} étant ouvert, il existe $\varepsilon_t > 0$ avec $\omega(V(t, \varepsilon_t)) \subset U_{j_t}$; les $V(t, \frac{\varepsilon_t}{2})$ constituent un recouvrement ouvert de $[0, 1]$, d'où il résulte qu'il est possible de choisir $t_1, \dots, t_m$ tels que les $V(t_i, \frac{1}{2}\varepsilon_{t_i})$ recouvrent $[0, 1]$; alors, si k est tel que $\frac{1}{2} < \min_{i=1, \dots, m} (\frac{1}{2}\varepsilon_{t_i})$, chaque $[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}]$ est contenu dans un $V(t, \varepsilon_t)$, donc $\omega([\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}])$ est contenu dans un U_{j_i} , ce qui entraîne que $\omega \in W_{j_1, \dots, j_k}$ pour certains $j_1, \dots, j_k$. On voit donc que, avec k variable, les $W_{j_1, \dots, j_k}$ recouvrent $\text{Hom}(B, I)$.

6) Notons, pour chaque n , Ω_n la classe des $(j_1, \dots, j_k)$, $k \leq n$; posons $\Omega = \bigcup \Omega_n$. Les fonctions g_α , $\alpha \in \Omega$, qu'on a construites dans 4) vérifient les conditions 1) et 2) du lemme de Dold (3.11).

On peut donc considérer des fonctions $h_{j_1, \dots, j_k} : \text{Hom}(B, I) \rightarrow \mathbb{R}^+$ continues, constituant une famille sommable (pour k variable), avec $h_{j_1, \dots, j_k}(\omega) \leq g_{j_1, \dots, j_k}(\omega)$ et telles que, $\forall \omega$, il existe $j_1, \dots, j_k$ avec $h_{j_1, \dots, j_k}(\omega) \neq 0$.

7) Soit $W_{j_1, \dots, j_k}^! = \{ \omega \in \text{Hom}(B, I) / h_{j_1, \dots, j_k}(\omega) \neq 0 \}$; on a $W_{j_1, \dots, j_k}^! \subset W_{j_1, \dots, j_k}$; il existe une fonction de relèvement généralisée (restriction de $\Lambda_{j_1, \dots, j_k}$) sur $W_{j_1, \dots, j_k}^!$. Les $W_{j_1, \dots, j_k}^!$ sont des ouverts numériques et la famille de ces ensembles est localement finie et recouvre $\text{Hom}(B, I)$. Le théorème résulte alors du lemme 3.12.

En utilisant les propositions 3.7, 3.8 et 3.9, on a le corollaire:

3.15 Corollaire. Si E est un espace quasi-topologique, B un espace topologique normal (resp. paracompact et séparé) et $p: E \rightarrow B$ une application continue telle qu'il existe un recouvrement ouvert et localement fini (resp. recouvrement ouvert) $(U_j)_{j \in J}$ de E , tel que, si $p_j: p^{-1}(U_j) \rightarrow U_j$ est la restriction de p , p_j soit une fibration, alors p est une fibration.

Remarquons que la situation " $p: E \rightarrow B$ est localement une fibration" se vérifie, en particulier, quand on a un espace fibré (au sens le plus faible) localement trivial, c'est-à-dire quand, pour chaque $x \in B$, il existe un ouvert U de B et un homéomorphisme $\phi: p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ (où F est un espace quasi-topologique donné) tel que $p(\phi^{-1}(x, y)) = x$ (tenir compte de la proposition 1.13).

On termine ce paragraphe avec une proposition qui nous donne un rapport entre les fibrations et les cofibrations dans QT .

3.16 Proposition. Soient les espaces quasi-topologiques A , E et la cofibration $f: A \rightarrow E$. Alors, pour chaque espace quasi-topologique X , l'application $\text{Hom}(1_X, f): \text{Hom}(X, E) \rightarrow \text{Hom}(X, A)$ est une fibration.

Démonstration: Soit Y un espace quasi-topologique et soient les applications continues $g:Y \rightarrow \text{Hom}(X,E)$, $H:Y \times I \rightarrow \text{Hom}(X,A)$ telles que $H(y,0) = \text{Hom}(\text{id},f)(g(y))$. On obtient une application continue $g':E \rightarrow \text{Hom}(X,Y)$ en posant $g'(e)(y) = g(y)(e)$ et une application continue $H':A \times I \rightarrow \text{Hom}(X,Y)$ définie par $H'(a,t)(y) = H(y,t)(a)$. On a $H'(a,0) = g'(f(a))$ et il existe donc $G':E \times I \rightarrow \text{Hom}(X,Y)$ continue, avec $G'(e,0) = g'(e)$, $G'(f(a),t) = H'(a,t)$. On peut définir une application continue $G:Y \times I \rightarrow \text{Hom}(X,E)$ par $G(y,t)(e) = G'(e,t)(y)$, et on a $G(y,0) = g(y)$, $\text{Hom}(\text{id},f)(G(y,t)) = H(y,t)$, ce qui nous montre qu'on a une fibration.

4. Produits tensoriels. Foncteurs "suspension" et "cône réduit"

Dans ce paragraphe on étudiera les produits tensoriels d'espaces quasi-topologiques pointés, en utilisant la même idée qu'on trouve dans [17], bien que pour cet auteur le mot "espace quasi-topologique" ait un sens assez différent. Certains résultats, comme l'associativité (Proposition 4.7), ne seraient pas vrais si on se mettait dans le cadre des espaces topologiques. Comme cas particuliers, on a les foncteurs "suspension" et "cône réduit" qui sont très employés en Topologie Algébrique.

Un *espace quasi-topologique pointé* est un couple (E,e) , où E est un espace quasi-topologique et où e est un point de E . On obtient une catégorie $\mathcal{QT}_*$ dont les objets sont les espaces quasi-topologiques pointés et les morphismes de (E,e) vers (E',e') les triplets $((E',e'), f, (E,e))$, où $f:E \rightarrow E'$ est une application continue pointée (c'est-à-dire telle que $f(e) = e'$). C'est une catégorie pointée, le morphisme zéro de (E,e) vers (E',e') étant défini par l'application de valeur constante e' . On note souvent (E,e) par $\hat{E}$.

Étant donné les espaces quasi-topologiques pointés (E,e) , (E_1,e_1) , ..., (E_n,e_n) ($n \geq 1$), on dit qu'une application continue

$$f:E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow E$$

est un *n-morphisme* si, pour chaque i et pour chaque choix de $x_j \in E_j$ ($j \neq i$), l'application $E_i \rightarrow E$, $y_i \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ est pointée, c'est-à-dire si on a $f(y_1, \dots, y_n) = e$ s'il existe i tel que $y_i = e_i$.

4.1 Proposition. *Etant donné les espaces quasi-topologiques pointés $(E_1, e_1), \dots, (E_n, e_n)$ ($n \geq 1$), il existe un espace quasi-topologique pointé (E, e) et un n -morphisme $f: E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow E$ tels que, quels que soient l'espace quasi-topologique pointé (E', e') et le n -morphisme $g: E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow E'$, il existe une, et une seule, application continue pointée $h: \hat{E} \rightarrow \hat{E}'$, telle que $hof = g$.*

Démonstration: Il suffit de prendre pour E le quotient

$$\frac{E_1 \times \dots \times E_n}{A}$$

où $A = \{(x_1, \dots, x_n) / \exists i \ x_i = e_i\}$ (voir définition dans I page 45), ce quotient étant pointé en $e = \omega$, et pour f l'application canonique

$$E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow \frac{E_1 \times \dots \times E_n}{A}.$$

4.2 Définition. On dit qu'un couple $((E, e), f)$ vérifiant les conditions de la proposition antérieure est un *produit tensoriel naturalisé* des (E_i, e_i) . On note alors $(E, e) = (E_1, e_1) \otimes \dots \otimes (E_n, e_n)$ et $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \otimes \dots \otimes x_n$.

Comme il arrive habituellement dans les situations de ce type, si (E, e) avec f et (E', e') avec f' sont des produits tensoriels naturalisés, il existe un isomorphisme de $\mathcal{QT}_*$ unique $h: \hat{E} \rightarrow \hat{E}'$ tel que $hof = f'$; réciproquement, si (E, e) avec f est un produit tensoriel naturalisé et $h: (E, e) \rightarrow (E', e')$ un isomorphisme de $\mathcal{QT}_*$, alors, en posant $f' = hof$, (E', e') avec f' est aussi un produit tensoriel naturalisé.

Souvent, si cela ne crée pas de confusion, un espace quasi-topologique pointé et l'espace quasi-topologique sous-jacent seront notés par le même symbole.

4.3 Corollaire. *Etant donné les espaces quasi-topologiques pointés $(E, e), (E_1, e_1), \dots, (E_n, e_n)$ ($n \geq 1$) et l'application $f: E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow E$, pour que (E, e) avec f soit un produit tensoriel naturalisé des (E_i, e_i) , il faut et il suffit que:*

- 1) f soit surjective ;
- 2) $f(x_1, \dots, x_n) = e$ si, et seulement si, il existe i avec $x_i = e_i$;
- 3) Si $\forall i \ x_i \neq e_i$, alors $f(x_1, \dots, x_n) = f(x'_1, \dots, x'_n) \Rightarrow x_i = x'_i \ \forall i$;

4) la quasi-topologie de E soit la quasi-topologie finale définie par f et la quasi-topologie de $E_1 \times \dots \times E_n$.

4.4 Proposition. *Si les espaces $E_1, \dots, E_n$ sont séparés, alors le produit tensoriel $\hat{E}_1 \otimes \dots \otimes \hat{E}_n$ est aussi séparé.*

Démonstration: E_i étant séparé, $\{e_i\}$ est fermé dans E_i , donc $A_i = E_1 \times \dots \times E_{i-1} \times \{e_i\} \times \dots \times E_n$ est fermé dans $E_1 \times \dots \times E_n$ (l'application projection $p_i: E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow E_i$, étant continue, est continue pour les topologies associées, et on a $A_i = p_i^{-1}(\{e_i\})$); comme $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$, A est fermé dans $E_1 \times \dots \times E_n$, lequel est séparé, ce qui (I 11.2) entraîne que le quotient est séparé.

4.5 Proposition. *Si l'un des espaces $E_1, \dots, E_n$ a un seul élément, alors $\hat{E}_1 \otimes \dots \otimes \hat{E}_n$ a un seul élément.*

Démonstration: Il suffit de remarquer que, avec les notations employées, on a $A = E_1 \times \dots \times E_n$.

4.6 Proposition. *Si $(E_i, e_i) = (\{a, b\}, a)$, $\{a, b\}$ ayant la quasi-topologie discrète (c'est-à-dire la topologie discrète), alors $\hat{E}_1 \otimes \dots \otimes \hat{E}_i \otimes \dots \otimes \hat{E}_n$ est un produit tensoriel de $(\hat{E}_1, \dots, \hat{E}_{i-1}, \hat{E}_{i+1}, \dots, \hat{E}_n)$, pour l'application*

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \mapsto x_1 \otimes \dots \otimes x_{i-1} \otimes x_{i+1} \otimes \dots \otimes x_n \quad (n \geq 0).$$

Démonstration: Il suffit de voir que l'application

$$\lambda: E_1 \times \dots \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times \dots \times E_n \rightarrow \hat{E}_1 \otimes \dots \otimes \hat{E}_i \otimes \dots \otimes \hat{E}_n$$

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \mapsto x_1 \otimes \dots \otimes x_{i-1} \otimes x_{i+1} \otimes \dots \otimes x_n$$

vérifie les conditions 1) et 4) de 4.3. Les conditions 1), 2) et 3) étant de vérification facile, on regarde la condition 4).

On sait déjà que l'application λ est continue et on doit donc démontrer que, si g est une application telle que $g \circ \lambda: E_1 \times \dots \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times \dots \times E_n \rightarrow E'$ est continue, alors $g: \hat{E}_1 \otimes \dots \otimes \hat{E}_i \otimes \dots \otimes \hat{E}_n \rightarrow E'$ est continue. Or, si

$$\lambda': E_1 \times \dots \times E_i \times \dots \times E_n \rightarrow \hat{E}_1 \otimes \dots \otimes \hat{E}_i \otimes \dots \otimes \hat{E}_n$$

est l'application canonique, $g \circ \lambda'$ admet une restriction continue à $E_1 \times \dots \times \{a\} \times \dots \times E_n$ (car constante) et à $E_1 \times \dots \times \{b\} \times \dots \times E_n$ (c'est la composée de $g \circ \lambda$ avec l'homéomorphisme

$$E_1 \times \dots \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times \dots \times E_n \rightarrow E_1 \times \dots \times E_{i-1} \times \{b\} \times E_{i+1} \times \dots \times E_n$$

canonique), donc, ces sous-ensembles étant ouverts dans $E_1 \times \dots \times E_i \times \dots \times E_n$

(car $\{a\}$ et $\{b\}$ sont ouverts dans E_i), il en résulte que $g \circ \lambda$ est continue, donc g est continue.

4.7 Proposition. L'espace $\hat{E}_1 \otimes \dots \otimes (\hat{E}_1 \otimes \dots \otimes \hat{E}_j) \otimes \dots \otimes \hat{E}_n$ est un produit tensoriel de $(\hat{E}_1, \dots, \hat{E}_n)$ pour l'application

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \otimes \dots \otimes (x_1 \otimes \dots \otimes x_j) \otimes \dots \otimes x_n.$$

Démonstration: Il suffit de voir que l'application

$$\lambda: E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow \hat{E}_1 \otimes \dots \otimes (\hat{E}_1 \otimes \dots \otimes \hat{E}_j) \otimes \dots \otimes \hat{E}_n,$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \otimes \dots \otimes (x_1 \otimes \dots \otimes x_j) \otimes \dots \otimes x_n$$

obéit aux conditions 1) à 4) de 4.3. Les conditions 1) et 3) étant de vérification facile, regardons la condition 4).

$\hat{E}_1 \otimes \dots \otimes \hat{E}_j$ ayant la quasi-topologie finale définie par l'application $E_1 \times \dots \times E_j \rightarrow \hat{E}_1 \otimes \dots \otimes \hat{E}_j$, $E_1 \times \dots \times (\hat{E}_1 \otimes \dots \otimes \hat{E}_j) \times \dots \times E_n$ a la quasi-topologie finale définie par

$$E_1 \times \dots \times (E_1 \times \dots \times E_j) \times \dots \times E_n \rightarrow E_1 \times \dots \times (\hat{E}_1 \otimes \dots \otimes \hat{E}_j) \times \dots \times E_n$$

(voir I 3.3), ce qui entraîne 4), car $\hat{E}_1 \otimes \dots \otimes (\hat{E}_1 \otimes \dots \otimes \hat{E}_j) \otimes \dots \otimes \hat{E}_n$ a la quasi-topologie finale définie par

$$E_1 \times \dots \times (\hat{E}_1 \otimes \dots \otimes \hat{E}_j) \times \dots \times E_n \rightarrow \hat{E}_1 \otimes \dots \otimes (\hat{E}_1 \otimes \dots \otimes \hat{E}_j) \otimes \dots \otimes \hat{E}_n.$$

4.8 Proposition. Si $i_1, i_2, \dots, i_n$ est une permutation de $1, 2, \dots, n$, alors $\hat{E}_{i_1} \otimes \dots \otimes \hat{E}_{i_n}$ est un produit tensoriel de $(\hat{E}_1, \dots, \hat{E}_n)$ pour l'application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_n}$.

Démonstration: Découle immédiatement de 4.3.

4.9 Proposition. Soient les espaces quasi-topologiques pointés $\hat{E}_i = (E_i, e_i)$ avec $\{e_i\}$ fermés dans E_i , soient $F_i \subset E_i$ fermés avec $e_i \in F_i$. Alors, $\hat{F}_1 \otimes \dots \otimes \hat{F}_n$ est un sous-espace quasi-topologique fermé de $\hat{E}_1 \otimes \dots \otimes \hat{E}_n$ si $\hat{F}_i = (F_i, e_i)$.

Démonstration: Etant donné

$$A = \{(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n / \exists i \quad x_i = e_i\},$$

$$B = \{(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n / \exists i \quad x_i = e_i\},$$

on doit voir que $\frac{F_1 \times \dots \times F_n}{B}$ est un sous-espace fermé de $\frac{E_1 \times \dots \times E_n}{A}$.

Or, $F_1 \times \dots \times F_n$ est un sous-espace fermé de $E_1 \times \dots \times E_n$, car

$E_1 \times \dots \times E_n = p_1^{-1}(E_1) \cap \dots \cap p_n^{-1}(E_n)$, où $p_i: E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow E_i$ est la projection canonique; A est fermé dans $E_1 \times \dots \times E_n$, car $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$ avec $A_i = E_1 \times \dots \times E_{i-1} \times \{e_i\} \times E_{i+1} \times \dots \times E_n$, et $B = (E_1 \times \dots \times E_n) \cap A$; la proposition en résulte, en tenant compte de I 11.3 et I 11.4.

4.10 Proposition. Soient les espaces quasi-topologiques pointés $\hat{E}_1, \dots, \hat{E}_n$ et $\hat{E}'_1, \dots, \hat{E}'_n$, soient les applications continues pointées $\phi_i: \hat{E}_i \rightarrow \hat{E}'_i$. Il existe alors une, et une seule, application continue pointée $\phi: \hat{E}_1 \otimes \dots \otimes \hat{E}_n \rightarrow \hat{E}'_1 \otimes \dots \otimes \hat{E}'_n$ telle que $\phi(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = \phi_1(x_1) \otimes \dots \otimes \phi_n(x_n)$.

Démonstration: Il suffit de remarquer que l'application

$$E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow \hat{E}'_1 \otimes \dots \otimes \hat{E}'_n, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \phi_1(x_1) \otimes \dots \otimes \phi_n(x_n),$$

est un n -morphisme et d'appliquer la définition du produit tensoriel.

4.11 Définition: L'application ϕ est appelée le produit tensoriel de $\phi_1, \dots, \phi_n$ et représentée par $\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n$.

4.12 Corollaire. Si l'un des morphismes ϕ_i est le morphisme zéro, alors $\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n$ est le morphisme zéro.

4.13 Corollaire. $\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n = \psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n$. Si l'on a des applications continues pointées $\phi_i: \hat{E}_i \rightarrow \hat{E}'_i$, $\psi_i: \hat{E}'_i \rightarrow \hat{E}''_i$, alors

$$(\psi_1 \circ \phi_1) \otimes \dots \otimes (\psi_n \circ \phi_n) = (\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n) \circ (\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n).$$

Le corollaire antérieur exprime que, si l'on choisit tous les produits tensoriels naturalisés, on a un foncteur "Produit tensoriel"

$$\otimes_n: \mathcal{QT}_* \times \dots \times \mathcal{QT}_* \rightarrow \mathcal{QT}_*.$$

La catégorie $\mathcal{QT}_*$ devient, comme $\mathcal{QT}$, une catégorie $p_{\mathcal{QT}}$ -dominée, quand on considère (ce qu'on fera toujours) sur les Hom la quasi-topologie induite par celle de la convergence locale. On a donc, en particulier, la notion d'homotopie et une catégorie quotient strict $\frac{\mathcal{QT}_*}{\sim}$.

4.14 Proposition. Etant donné les espaces quasi-topologiques pointés $\hat{E}_i = (E_i, e_i)$, $i \leq n$, avec le produit tensoriel naturalisé $(\hat{E}, f)$, et l'espace quasi-topologique pointé $\hat{E}'$, alors il existe un homéomorphisme ξ de l'ensemble des n -morphismes de $E_1 \times \dots \times E_n$

vers E' sur l'ensemble des applications continues pointées de $\hat{E}$ vers $\hat{E}'$, qui associe, à $g: E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow E'$, l'application $h: \hat{E} \rightarrow \hat{E}'$ définie par $g = h \circ f$.

Démonstration: ξ est une bijection et il nous suffit donc de démontrer que ξ^{-1} est un homéomorphisme. Or, comme $f: E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow E$ définit sur E la quasi-topologie-finale, l'application

$$E' \cdot QT \cdot E \rightarrow E' \cdot QT \cdot (E_1 \times \dots \times E_n), \quad h \mapsto h \circ f,$$

définira sur $E' \cdot QT \cdot E$ la quasi-topologie initiale (I 3.4) et, par restriction à $\hat{E}' \cdot QT_* \cdot \hat{E}$ et à l'ensemble des n -morphismes de $E_1 \times \dots \times E_n$ vers E' , on obtient une bijection qui définit sur le premier espace la quasi-topologie initiale, donc un homéomorphisme.

4.15 Proposition. *Etant donné les espaces quasi-topologiques pointés $\hat{E}_i = (E_i, e_i)$, $\hat{E}'_i = (E'_i, e'_i)$ ($1 \leq i \leq n$) et les produits tensoriels naturalisés $((E, e), f)$ et $((E', e'), f')$, alors l'application*

$$(\hat{E}'_1 \cdot QT_* \cdot \hat{E}_1) \times \dots \times (\hat{E}'_n \cdot QT_* \cdot \hat{E}_n) \rightarrow \hat{E}' \cdot QT_* \cdot \hat{E}$$

définie par $(\phi_1, \dots, \phi_n) \mapsto \phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n$ est continue.

Démonstration: On a l'application continue

$$\pi: (\hat{E}'_1 \cdot QT_* \cdot \hat{E}_1) \times \dots \times (\hat{E}'_n \cdot QT_* \cdot \hat{E}_n) \rightarrow \pi \hat{E}'_1,$$

$$((\phi_1, \dots, \phi_n), (x_1, \dots, x_n)) \mapsto (\phi_1(x_1), \dots, \phi_n(x_n)),$$

et on obtient donc une application continue ($\pi \hat{E}'_1 = (\pi E'_1, (e'_i)) \dots$)

$$\mu: \pi(\hat{E}'_1 \cdot QT_* \cdot \hat{E}_1) \rightarrow (\pi \hat{E}'_1) \cdot QT_* \cdot (\pi \hat{E}_1), \quad (\phi_1, \dots, \phi_n) \mapsto \phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n.$$

L'application

$$\nu: (\pi \hat{E}'_1) \cdot QT_* \cdot (\pi \hat{E}_1) \rightarrow \hat{E}' \cdot QT_* \cdot (\hat{E}_1 \times \dots \times \hat{E}_n), \quad \phi \mapsto f' \circ \phi,$$

est aussi continue; la proposition en résulte, l'application de l'énoncé étant $\xi \circ \nu' \circ \mu$, où ξ est l'application considérée dans la proposition antérieure et ν' une restriction de ν .

4.16 Corollaire. *Etant donné les espaces quasi-topologiques pointés (E_i, e_i) et (E'_i, e'_i) ($i = 1, 2, \dots, r$), et les applications continues pointées $\phi_i, \phi'_i: \hat{E}_i \rightarrow \hat{E}'_i$ avec ϕ_i homotopique à ϕ'_i (dans QT_*), alors $\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n$ est homotopique à $\phi'_1 \otimes \dots \otimes \phi'_n$.*

Démonstration: Si $t \mapsto \phi_i$ est un arc liant ϕ_i à ϕ'_i dans $\hat{E}'_i \cdot QT_* \cdot \hat{E}_i$, $t \mapsto \phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n$ sera un arc liant $\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n$ à $\phi'_1 \otimes \dots \otimes \phi'_n$.

dans $(\hat{E}'_1 \times \dots \times \hat{E}'_n) \cdot \mathcal{QT}_* \cdot (\hat{E}_1 \times \dots \times \hat{E}_n)$.

4.17 Corollaire. On obtient par passage au quotient un foncteur

$$\bar{H}: \frac{\mathcal{QT}_*}{\sim} \times \dots \times \frac{\mathcal{QT}_*}{\sim} \rightarrow \frac{\mathcal{QT}_*}{\sim}$$

Revenant à la catégorie $\mathcal{QT}_*$, elle est à produits et à sommes (elle est aussi à limites projectives et inductives, mais cela ne nous intéresse pas dans la suite). Etant donné une famille (E_α, e_α) , $\alpha \in A$, d'espaces quasi-topologiques pointés, on obtient un produit en prenant le produit $\prod E_\alpha$ et en le pointant en $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$. Etant donné une famille (E_α, e_α) , $\alpha \in A$, d'espaces quasi-topologiques pointés, on obtient une somme (E, e) en prenant pour E le sous-ensemble de $\prod E_\alpha$ constitué par les $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ où au plus un x_α est différent de e_α , pour injection $q_\alpha: E_\alpha \rightarrow E$, application qui associe, à $x_\alpha \in E_\alpha$, $(y_\beta)_{\beta \in A} \in E$ avec $y_\alpha = x_\alpha$, $y_\beta = e_\beta$ ($\beta \neq \alpha$), pour quasi-topologie sur E la quasi-topologie finale définie par les $q_\alpha: E_\alpha \rightarrow E$ et, finalement, pour e , $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$.

4.18 Proposition. Les produits et les sommes dans $\mathcal{QT}_*$ sont compatibles avec la structure de catégorie $p_{\mathcal{QT}}$ -dominée.

Démonstration: Dans le cas des produits, cela résulte des propositions 1.6 et I 3.2. Dans le cas des sommes d'une famille non vide d'objets, cela résulte des propositions 1.6 et I 3.4. Enfin, si (E, e) est une somme d'une famille vide d'objets, $E = \{e\}$ et, pour chaque espace quasi-topologique pointé (E', e') , $\hat{E}' \cdot \mathcal{QT}_* \cdot \hat{E}$ a un seul élément; c'est donc le produit de la famille vide d'objets de $\mathcal{QT}_*$.

4.19 Corollaire. Le foncteur canonique $H: \mathcal{QT}_* \rightarrow \frac{\mathcal{QT}_*}{\sim}$ est compatible avec les sommes et les produits.

4.20 Proposition. Soient les espaces quasi-topologiques pointés $(E_1, e_1), \dots, (E_{i-1}, e_{i-1}), (E_{i+1}, e_{i+1}), \dots, (E_n, e_n)$. Soit $F: \mathcal{QT}_* \rightarrow \mathcal{QT}_*$ le foncteur qui associe, à $\phi_i: (X_i, x_i) \rightarrow (X'_i, x'_i)$, l'application $1_{\hat{E}_1} \times \dots \times 1_{\hat{E}_{i-1}} \times \phi_i \times 1_{\hat{E}_{i+1}} \times \dots \times 1_{\hat{E}_n}$:

$$\hat{E}_1 \times \dots \times \hat{E}_{i-1} \times \hat{X}_i \times \hat{E}_{i+1} \times \dots \times \hat{E}_n \rightarrow \hat{E}_1 \times \dots \times \hat{E}_{i-1} \times \hat{X}'_i \times \hat{E}_{i+1} \times \dots \times \hat{E}_n.$$

Alors F admet un adjoint à droite $G: \mathcal{QT}_* \rightarrow \mathcal{QT}_*$ ([18]).

Démonstration: Soit G le foncteur qui associe, à $(E, e) \in \mathcal{QT}_*$, l'ensemble $\hat{E} \cdot \mathcal{QT}_* \cdot (\hat{E}_1 \times \dots \times \hat{E}_{i-1} \times \hat{E}_{i+1} \times \dots \times \hat{E}_n)$ pointé en l'application

constante et muni de la quasi-topologie de la convergence locale, et à $\phi: (E, e) \rightarrow (E', e')$ l'application continue pointée $\text{Hom}(\phi, \text{id})$:

$$\hat{E} \cdot QT_* \cdot (\hat{E}_1 \otimes \dots \otimes \hat{E}_{i-1} \otimes \hat{E}_{i+1} \otimes \dots \otimes \hat{E}_n) \rightarrow \hat{E}' \cdot QT_* \cdot (\hat{E}_1 \otimes \dots \otimes \hat{E}_{i-1} \otimes \hat{E}_{i+1} \otimes \dots \otimes \hat{E}_n) .$$

Si (E, e) , $(X_i, x_i) \in QT_{*0}$, soit

$$\alpha_{\hat{E}, \hat{X}_i}: \hat{E} \cdot QT_* \cdot F(\hat{X}_i) \rightarrow G(\hat{E}) \cdot QT_* \cdot \hat{X}_i$$

l'application qui associe, à l'application continue pointée

$$f: \hat{E}_1 \otimes \dots \otimes \hat{X}_i \otimes \dots \otimes \hat{E}_n \rightarrow \hat{E} , \text{ l'application continue pointée}$$

$$\underline{f}: \hat{X}_i \rightarrow \hat{E} \cdot QT_* \cdot (\hat{E}_1 \otimes \dots \otimes \hat{E}_{i-1} \otimes \hat{E}_{i+1} \otimes \dots \otimes \hat{E}_n)$$

définie par

$$\underline{f}(y_i)(y_1 \otimes \dots \otimes y_{i-1} \otimes y_{i+1} \otimes \dots \otimes y_n) = f(y_1 \otimes \dots \otimes y_i \otimes \dots \otimes y_n)$$

(on utilise le fait que,

$$E_1 \otimes \dots \otimes E_{i-1} \otimes E_{i+1} \otimes \dots \otimes E_n \rightarrow \hat{E}_1 \otimes \dots \otimes \hat{E}_{i-1} \otimes \hat{E}_{i+1} \otimes \dots \otimes \hat{E}_n$$

définissant dans le second espace la quasi-topologie finale,

$$X_i \otimes (E_1 \otimes \dots \otimes E_{i-1} \otimes E_{i+1} \otimes \dots \otimes E_n) \rightarrow X_i \otimes (\hat{E}_1 \otimes \dots \otimes \hat{E}_{i-1} \otimes \hat{E}_{i+1} \otimes \dots \otimes \hat{E}_n)$$

définit aussi dans le second espace la quasi-topologie finale, d'après I 3.4) . $\alpha_{\hat{E}, \hat{X}_i}$ est injective, la formule antérieure définissant f à partir de $\underline{f}$, et est surjective, car, si

$$\underline{f}: \hat{X}_i \rightarrow \hat{E} \cdot QT_* \cdot (\hat{E}_1 \otimes \dots \otimes \hat{E}_{i-1} \otimes \hat{E}_{i+1} \otimes \dots \otimes \hat{E}_n)$$

est continue pointée, l'application $E_1 \otimes \dots \otimes E_n \rightarrow E$,

$$(v_1, \dots, v_n) \sim \underline{f}(v_i)(v_1 \otimes \dots \otimes v_{i-1} \otimes v_{i+1} \otimes \dots \otimes v_n) ,$$

est un n -morphisme et définit donc une application continue pointée

$$f: \hat{E}_1 \otimes \dots \otimes \hat{E}_n \rightarrow \hat{E} , \text{ pour laquelle } \underline{f} = \alpha_{\hat{E}, \hat{X}_i}(f) . \text{ On vérifie facilement}$$

que la classe des $\alpha_{\hat{E}, \hat{X}_i}$ définit une transformation naturelle du fonc-

teur $\text{Hom}_{QT_*} \circ (1 \times F): QT_* \times QT_*^* \rightarrow \text{Ens}$ dans le fonc-

$$\text{Hom}_{QT_*} \circ (G \times 1): QT_* \times QT_*^* \rightarrow \text{Ens} ,$$

ce qui montre que G est bien un adjoint à droite de F .

4.21 Corollaire. Le foncteur $F: QT_* \rightarrow QT_*$ est compatible avec les sommes.

Avant de passer aux applications du concept de produit tensoriel d'espaces quasi-topologiques pointés, remarquons que celui-ci

rentre dans le cadre plus général défini par Foltz dans [28] .

Un premier exemple d'un foncteur F du type défini par la proposition antérieure est le foncteur "cône réduit" .

4.22 Définition. Etant donné l'espace quasi-topologique pointé (E, e) , on définit son *cône réduit* comme étant l'espace quasi-topologique pointé

$$C(E, e) = (I, 0) \rtimes (E, e) ,$$

aussi noté $\hat{CE}$ quand il n'y a pas de confusion sur le point base. Si $\phi: (E, e) \rightarrow (E', e')$ est une application continue pointée, on note

$$C(\phi) = 1_I \rtimes \phi .$$

Si $\{e\}$ est fermé dans E , le fait que $\{0, 1\}$ est fermé dans $[0, 1]$ entraîne (4.9) que $\{\hat{0}, 1\} \rtimes \hat{E}$ est un sous-espace fermé de $\hat{CE}$, lequel, d'après la proposition 4.6 , est homéomorphe à $\hat{E}$ par l'application $x \mapsto 1 \rtimes x$. La proposition suivante étudie le cas où $\{e\}$ n'est pas nécessairement fermé dans E .

4.23 Proposition. Soit (E, e) un espace quasi-topologique pointé. L'application pointée $\xi: \hat{E} \rightarrow \hat{CE}$, $x \mapsto 1 \rtimes x$, définit un homéomorphisme de $\hat{E}$ sur un sous-espace pointé de $\hat{CE}$.

Démonstration: ξ est évidemment continue; il reste seulement à démontrer que, si F est un filtre sur E tel que $\xi(F) \rightarrow 1 \rtimes x$ dans $\hat{CE}$, alors $F \rightarrow x$ dans E . Or, si $\eta: I \times E \rightarrow \hat{CE}$ est l'application canonique, on voit que:

a) Si $x \neq e$, $\xi(F) \supset \eta(F_1)$ avec $F_1 \rightarrow (1, x)$, de sorte que $F_1 \supset V \times F'_1$, V filtre des voisinages de 1 dans I , $F'_1 \xrightarrow{E} x$; alors $F \supset F'_1$, car, si $A \in F'_1$, on a $]0, 1] \times A \in V \times F'_1$, $\eta(]0, 1] \times A) \supset \xi(B)$, $B \in F$, donc $A \supset B$, $A \in F$; ceci entraîne que $F \xrightarrow{E} x$.

b) Si $x = e$, $\xi(F) \supset \eta(F_1 \cap \dots \cap F_n)$ avec $F_i \rightarrow (t_i, e)$, $t_1 = 1$, $t_i \neq 1$ pour $i \geq 2$, et alors $F_i \supset V_i \times F'_i$, V_i filtre des voisinages de t_i , $F'_i \xrightarrow{E} e$; il s'ensuit $F \supset F'_1 \cap e^e$, car, si $A \in F'_1 \cap e^e$, on voit que

$$(]0, 1] \times A) \cup (V_2 \times E) \cup \dots \cup (V_n \times F) \in F_1 \cap \dots \cap F_n ,$$

où les $V_i \in V_i$ sont choisis tels que $1 \notin V_i$, donc

$$\eta(]0, 1] \times A \cup \dots \cup V_n \times F) \supset \xi(F) , \quad B \in F ;$$

par suite $A \supset B$ (car $e \in A$), $A \in F$, et, comme $F'_1 ne^e \rightarrow e$, on a $F \xrightarrow{E} e$.

Tenant compte de la proposition antérieure on identifie souvent $\hat{E}$ à un sous-espace de $\hat{CE}$ (qui est fermé si $\{e\}$ est fermé dans E).

La catégorie $\frac{QT_*}{\sim}$ étant pointée (parce que QT_* l'est), on sait qu'un objet A est initial si, et seulement si, il est final, les deux conditions étant équivalentes au fait que le morphisme zéro de A vers A est 1_A ; dans ce cas il est appelé objet zéro. Les objets zéros de $\frac{QT_*}{\sim}$ sont ceux qui sont isomorphes à un espace du type $(\{a\}, a)$ et sont appelés espaces quasi-topologiques pointés contractiles.

4.24 Proposition. Si (E, e) est un espace quasi-topologique pointé, alors $\hat{CE}$ est un espace quasi-topologique pointé contractile.

Démonstration: Soient $f: (\{a\}, a) \rightarrow \hat{CE}$, $g: \hat{CE} \rightarrow (\{a\}, a)$ les seuls morphismes; on a $g \circ f = \text{id}$, $f \circ g = 0: \hat{CE} \rightarrow \hat{CE}$ et il faut seulement démontrer que les morphismes $0, \text{id}: \hat{CE} \rightarrow \hat{CE}$ sont homotopes dans QT_* . Or, on a une application continue

$$\xi: [0, 1] \rightarrow \hat{CE} \cdot QT_* \cdot \hat{CE}$$

définie par

$$\xi(t')(t \circ x) = t t' \circ x ,$$

et on voit que $\xi(0) = 0$, $\xi(1) = \text{id}$.

On passe maintenant à la définition des sphères quasi-topologiques S_n qui nous seront très utiles pour la théorie de l'homotopie. On représente par $\hat{I}^n$ le sous-espace de I^n constitué par les $(t_1, \dots, t_n)$ tels qu'il existe i avec $t_i \in \{0, 1\}$. En particulier on a $\hat{I}^0 = \emptyset$.

4.25 Définition. On définit la sphère quasi-topologique S_n comme étant l'espace quasi-topologique quotient $\frac{I^n}{\hat{I}^n}$ (voir I page 45) pointé en $\omega = \theta_n(I^n)$, si $n \geq 1$, et en ω , si $n = 0$, où $\theta_n: I^n \rightarrow S_n$ est l'application canonique. On définit la sphère topologique S'_n comme étant l'espace topologique associé à S_n .

4.26 Corollaire. La topologie de S'_n est la topologie finale définie par l'application $\theta_n: I^n \rightarrow S'_n$. (Voir I 2.4.)

4.27 Corollaire. On a $S_0 = S'_0$, $S_1 = S'_1$.

Démonstration: Il suffit d'appliquer I 11.6 .

4.28 Remarque. Employant la technique utilisée dans l'exemple I 5.9 , on peut voir que, pour $n \geq 2$, $S_n \neq S'_n$.

4.29 Proposition. S_0 est un espace formé par deux éléments $\{0, \omega\}$ pointé en ω et muni de la quasi-topologie discrète.

Démonstration: On sait que S_0 a, comme quasi-topologie, la topologie finale définie par l'inclusion $\{0\} \rightarrow \{0, \omega\}$ et il suffit de remarquer que pour celle-ci $\{0\}$ et $\{\omega\}$ sont ouverts.

La proposition suivante montre que les sphères topologiques S'_n sont des n -sphères, dans le sens qu'elles sont homéomorphes aux

$$S_n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} / \sum x_i^2 = 1\} .$$

On sait déjà qu'il en est ainsi du compactifié $\tilde{\mathbb{R}}^n$ d'Alexandroff de l'espace $\mathbb{R}^n$, si $n \geq 1$.

4.30 Proposition. Les S'_n sont homéomorphes aux S_n .

Démonstration: Le cas $n = 0$ résulte de la proposition antérieure. Supposant $n \geq 1$, soit $\xi:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ l'homéomorphisme défini par

$$t \rightsquigarrow \frac{2t-1}{1-|2t-1|}$$

(l'inverse est défini par

$$y \rightsquigarrow \frac{1}{2}(1 + \frac{y}{1+|y|})) .$$

L'application $\lambda: I^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}^n$ définie par

$$(t_1, \dots, t_n) \rightsquigarrow \begin{cases} (\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)) & \text{si } (t_1, \dots, t_n) \notin i^n, \\ \omega & \text{si } (t_1, \dots, t_n) \in i^n \end{cases}$$

est continue et donne, par passage au quotient, $\underline{\lambda}: S'_n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}^n$ qui est bijective et continue; comme S'_n est compact (image du compact $[0, 1]^n$) et $\mathbb{R}^n$ séparé, $\underline{\lambda}$ est un homéomorphisme.

4.31 Proposition. S_{m+n} est un produit tensoriel de (S_m, S_n) pour l'application $(\omega, x) \rightsquigarrow \omega$, $(x, \omega) \rightsquigarrow \omega$ et

$$(\theta_m(t_1, \dots, t_m), \theta_n(t'_1, \dots, t'_n)) \rightsquigarrow_{m+n} (t_1, \dots, t_m, t'_1, \dots, t'_n) .$$

Démonstration: Si $m = 0$ ou $n = 0$, la proposition résulte de 4.6 et 4.29 . Supposons donc $m \neq 0$ et $n \neq 0$. On a une application

bien définie $S_m \times S_n \rightarrow S_{m+n}$,

$$(\theta_m(t_1, \dots, t_m), \theta_n(t'_1, \dots, t'_n)) \rightsquigarrow \theta_{m+n}(t_1, \dots, t_m, t'_1, \dots, t'_n),$$

laquelle vérifie les conditions 1) à 3) de 4.3 ; montrons qu'elle vérifie aussi 4) : Les applications $\theta_m: I^m \rightarrow S_m$, $\theta_n: I^n \rightarrow S_n$ définissant sur S_m et S_n les quasi-topologies finales,

$\theta_m \times \theta_n: I^m \times I^n \rightarrow S_m \times S_n$ définit sur $S_m \times S_n$ la quasi-topologie finale finale; comme $\theta_{m+n}: I^{m+n} \rightarrow S_{m+n}$ définit sur S_{m+n} la quasi-topologie finale, il en résulte que l'application $S_m \times S_n \rightarrow S_{m+n}$ définit sur S_{m+n} la quasi-topologie finale.

4.32 Proposition. *L'application continue $\text{id}: S_n \rightarrow S'_n$ est inversible dans $\frac{OT_*}{\sim}$.*

Démonstration: Soit $P_n \in I^n$ le point $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$, soit $M: R^n \rightarrow R$ l'application continue $(x_1, \dots, x_n) \rightsquigarrow \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ (on peut évidemment déjà supposer $n \geq 1$). Soit $f: S'_n \rightarrow S_n$ l'application

$$f(\theta_n(x)) = \begin{cases} \theta_n(P_n + 2(x - P_n)) & \text{si } 0 \leq M(x - P_n) \leq \frac{1}{4}, \\ \omega & \text{si } \frac{1}{4} \leq M(x - P_n) \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

On a $S'_n = A \cup B$, où

$$A = \theta_n(\{x \in I^n / M(x - P_n) \leq \frac{1}{4}\}), \quad B = \theta_n(\{x \in I^n / M(x - P_n) > \frac{1}{4}\}),$$

A et B étant fermés dans S'_n , car $\theta_n^{-1}(A)$ et $\theta_n^{-1}(B)$ sont fermés dans I^n . La restriction

$$\theta_n / : \{x \in I^n / M(x - P_n) \leq \frac{1}{4}\} \rightarrow A$$

de θ_n est une bijection qui définit dans le second espace la quasi-topologie finale (I 2.8), donc c'est un homéomorphisme. Ceci montre que la restriction de f à A est continue; sa restriction à B étant continue (elle est constante), $f: S'_n \rightarrow S_n$ est continue (I 7.7 et I 7.2). Soit $\bar{H}: I \times I^n \rightarrow S_n$,

$$\bar{H}(t, x) = \begin{cases} \theta_n(P_n + \frac{2}{2-t}(x - P_n)) & \text{si } 0 \leq M(x - P_n) \leq \frac{2-t}{4} \\ \omega & \text{si } \frac{2-t}{4} \leq M(x - P_n) \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

On voit que $\bar{H}$ est continue; donc, $1 \times \theta_n: I \times I^n \rightarrow I \times S_n$ définissant dans le second espace la quasi-topologie finale (I 3.3) et

$1 \times \theta_n: I \times I^n \rightarrow I \times S'_n$ définissant dans le second espace la topologie finale (car I est localement compact et séparé), on obtient des applica-

tions continues $H: I \times S_n \rightarrow S_n$, $H: I \times S'_n \rightarrow S'_n$ définies par

$$H(t, \theta_n(x)) = \begin{cases} \theta_n(P_n + \frac{2}{2-t}(x-P_n)) & \text{si } M(x-P_n) \leq \frac{2-t}{4} \\ \omega & \text{si } \frac{2-t}{4} \leq M(x-P_n) \end{cases}$$

et on voit que $y \mapsto H(0, y)$ est l'identité et $y \mapsto H(1, y)$ est f , ce qui montre que $\text{id}_f: S'_n \rightarrow S'_n$ et $f \circ \text{id}: S_n \rightarrow S_n$ sont homotopes à $\text{id}_{S'_n}$ et id_{S_n} .

A partir de la sphère S_1 on définit le foncteur "suspension" qui est un autre foncteur F vérifiant les conditions de la proposition 4.20.

4.33 Définition. Etant donné l'espace quasi-topologique pointé (E, e) , on définit sa *suspension* $S(E, e) = S_1 \rtimes (E, e)$, qu'on note aussi SE quand ceci n'apporte pas de confusion. Si $\phi: (E, e) \rightarrow (E', e')$ est une application continue pointée, on pose

$$S(\phi) = \text{Id}_{S_1} \rtimes \phi: S_1 \rtimes E \rightarrow S_1 \rtimes E'.$$

5. Les groupes d'homotopie

On commence par définir sur S_1 une structure de cogroupe dans la catégorie $\frac{QT_*}{\sim}$ (voir {19}) ; à partir de là on obtient par des méthodes fonctorielles des structures de cogroupe dans la catégorie $\frac{QT_*}{\sim}$ sur les S_n ($n \geq 1$) (commutatives si $n \geq 2$) et des structures de cogroupe dans la catégorie $\frac{ST_*}{\sim}$ (aires quasi-topologiques pointées) sur les (CS_n, S_n) ($n \geq 1$) (commutatives si $n \geq 2$). On définit ensuite les groupes d'homotopie absolus et relatifs et on établit les suites exactes d'homotopie d'une fibration et d'une paire quasi-topologique, par la méthode exposée dans {20}.

Rappelons la caractérisation des sommes dans QT_* qui a été donnée après le corollaire 4.17. En particulier, si on a un nombre fini d'objets $(E_1, e_1), \dots, (E_n, e_n)$ tels que $\{e_i\}$ soit fermé dans E_1 , on a une autre caractérisation de la quasi-topologie de la somme (E, e) :

5.1 Proposition. Dans les conditions antérieures la quasi-topologie de E est induite par celle du produit $E_1 \times \dots \times E_n$.

Démonstration: Chaque E_i est homéomorphe à

$$E'_i = \{e_1\} \times \dots \times \{e_{i-1}\} \times E_i \times \{e_{i+1}\} \times \dots \times \{e_n\},$$

lequel est un sous-espace fermé de $E_1 \times \dots \times E_n$, donc un sous-espace fermé de E (avec la quasi-topologie induite), car l'inclusion $E \rightarrow E_1 \times \dots \times E_n$ est continue. Mais, on a $E = E'_1 \cup \dots \cup E'_n$ et, d'après I 7.7 et I 7.8, la quasi-topologie induite de E est la quasi-topologie finale déterminée par les inclusions des E'_i , et par suite celle déterminée par les $q_i: E_i \rightarrow E$.

La somme des objets $\hat{E}_1, \dots, \hat{E}_n$ de QT_* sera représentée par $\hat{E}_1 \vee \dots \vee \hat{E}_n$.

5.2 Proposition. Il existe une application continue pointée $k: S_1 \rightarrow S_1 \vee S_1$ définie par

$$\theta_1(t) \rightsquigarrow \begin{cases} (\theta_1(2t), \omega), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (\omega, \theta_1(2t-1)), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

laquelle définit sur S_1 une structure de cogroupe dans $\frac{QT_*}{\sim}$, dont l'unité est définie par la seule application continue pointée $i: S_1 \rightarrow 0$ et l'inverse par l'application continue pointée $\phi: S_1 \rightarrow S_1$ définie par $\theta_1(t) \rightsquigarrow \theta_1(1-t)$.

Démonstration: Ceci est bien connu dans le cas topologique et l'on tient compte du fait que $S_1 = S'_1$.

5.3 Proposition. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour chaque $1 \leq i \leq n$ il existe une application continue pointée $k_i: S_n \rightarrow S_n \vee S_n$ définie par

$$\theta_n(t_1, \dots, t_n) \rightsquigarrow \begin{cases} (\theta_n(t_1, \dots, t_{i-1}, 2t_i, t_{i+1}, \dots, t_n), \omega), & 0 \leq t_i \leq \frac{1}{2} \\ (\omega, \theta_n(t_1, \dots, t_{i-1}, 2t_i-1, t_{i+1}, \dots, t_n)), & \frac{1}{2} \leq t_i \leq 1. \end{cases}$$

Ces applications définissent sur S_n des structures de cogroupe dans $\frac{QT_*}{\sim}$, qui sont toutes égales et commutatives.

Démonstration: Si C_1, C_2 et C_3 sont des catégories et $F: C_1 \times C_2 \rightarrow C_3$ est un foncteur, on note, pour chaque unité $e_1 \in C_{1_0}$ (respectivement $e_2 \in C_{2_0}$), $e_1 F: C_2 \rightarrow C_3$ (respectivement $F e_2: C_1 \rightarrow C_3$) le foncteur obtenu à partir de F en fixant la première variable en e_1 (respectivement la seconde en e_2).

Pour chaque $i \neq 1$, on peut considérer le foncteur $F_i: \mathcal{QT}_* \times \mathcal{QT}_* \rightarrow \mathcal{QT}_*$ qui associe, à $(f, g): ((X_1, x_1), (Y_1, y_1)) \rightarrow ((X_2, x_2), (Y_2, y_2))$, $f \otimes 1_{S_1} \otimes \dots \otimes g \otimes 1_{S_1} \otimes \dots \otimes 1_{S_1}: \hat{X}_1 \otimes S_1 \otimes \dots \otimes \hat{Y}_1 \otimes S_1 \otimes \dots \otimes S_1 \rightarrow \hat{X}_2 \otimes S_1 \otimes \dots \otimes \hat{Y}_2 \otimes S_1 \otimes \dots \otimes S_1$ (avec "YY" au i-ème facteur); d'après 4.16, ce foncteur va définir un foncteur $\underline{F}_i: \frac{\mathcal{QT}_*}{\sim} \times \frac{\mathcal{QT}_*}{\sim} \rightarrow \frac{\mathcal{QT}_*}{\sim}$, qui, d'après 4.19 et 4.21, est séparément compatible avec les sommes.

Par induction, à partir de 4.31, on voit que S_n est un produit tensoriel de $(S_1, \dots, S_1)$ (n fois) pour l'application

$$(\theta_1(t_1) \otimes \dots \otimes \theta_1(t_n)) \rightsquigarrow \theta_n(t_1, \dots, t_n).$$

En tenant compte de la proposition 3.7.3 de [17], on voit que les cogroupes dans $\frac{\mathcal{QT}_*}{\sim}$ images du cogroupe de la proposition antérieure par les foncteurs $\underline{F}_i: \frac{\mathcal{QT}_*}{\sim} \rightarrow \frac{\mathcal{QT}_*}{\sim}$ et $\underline{F}_{-i}: \frac{\mathcal{QT}_*}{\sim} \rightarrow \frac{\mathcal{QT}_*}{\sim}$ sont égaux et commutatifs. Or, on montre facilement que ces opérations images sont définies précisément par les applications k_i et k_{-i} de l'énoncé.

On va représenter par $\mathcal{QT}_{*2}$ la catégorie ayant pour objets les paires quasi-topologiques pointées, c'est-à-dire les triplets (X, A, x_0) , où X est un espace quasi-topologique et $x_0 \in A \subset X$, et dont les morphismes sont les triplets $((Y, B, y_0), f, (X, A, x_0))$, où $f: X \rightarrow Y$ est une application continue avec $f(A) \subset B$ et $f(x_0) = y_0$. On note souvent $(X, A, x_0) = (\hat{X}, \hat{A})$.

Si on tient compte de I 2.8, on voit que, si les $(X_\alpha, A_\alpha, x_\alpha)$, $\alpha \in A$, sont des paires quasi-topologiques pointées, alors $\hat{V}_A$ est un sous-espace quasi-topologique de $\hat{V}_{X_A}$ (somme dans $\mathcal{QT}_*$); on peut donc considérer la paire quasi-topologique pointée $(\hat{V}_{X_A}, \hat{V}_A)$, qui est une somme des $(X_\alpha, A_\alpha, x_\alpha)$ dans $\mathcal{QT}_{*2}$ pour les injections $\iota_\alpha: (X_\alpha, A_\alpha, x_\alpha) \rightarrow (\hat{V}_{X_A}, \hat{V}_A)$. De même $(\pi_{X_A}, \pi_{A_A}, (x_\alpha))$ est un produit des $(X_\alpha, A_\alpha, x_\alpha)$ pour les projections canoniques.

La catégorie $\mathcal{QT}_{*2}$ est pointée, et munie canoniquement d'une structure de catégorie $\mathcal{QT}$ -dominée. On montre, comme dans 4.18, que les sommes et produits dans $\mathcal{QT}_{*2}$ sont compatibles avec la structure de catégorie $\mathcal{QT}$ -dominée, ce qui entraîne, en particulier, que le foncteur $H: \mathcal{QT}_{*2} \rightarrow \frac{\mathcal{QT}_{*2}}{\sim}$ est compatible avec les sommes et les produits.

5.4 Proposition. Soit $n \geq 1$. Pour chaque $1 \leq i \leq n$, il existe un morphisme de $\mathcal{QT}_{*2}$, $\iota_i: (CS_n, S_n) \rightarrow (CS_n \vee CS_n, S_n \vee S_n)$ défini par

$$t_{\#0} (t_1, \dots, t_n) \rightsquigarrow \begin{cases} (t_{\#0} (t_1, \dots, 2t_i, \dots, t_n), *), & 0 \leq t_i \leq \frac{1}{2} \\ (*, t_{\#0} (t_1, \dots, 2t_i - 1, \dots, t_n)), & \frac{1}{2} \leq t_i \leq 1. \end{cases}$$

Ces morphismes définissent sur (CS_n, S_n) des structures de cogroupe dans la catégorie $\frac{QT_*2}{\sim}$, qui sont toutes égales et, si $n \geq 2$, commutatives.

Démonstration: Soit $F: QT_* \rightarrow QT_*2$ le foncteur qui associe $(\hat{CX}, \hat{X})$ à (X, x_0) et $C(f): (\hat{CX}, \hat{X}) \rightarrow (\hat{CY}, \hat{Y})$ à $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$. D'après les remarques précédentes, F est compatible avec les sommes (en tenant compte de 4.21). D'autre part, l'application

$$\hat{Y} \cdot QT_* \cdot \hat{X} \rightarrow (\hat{CY}, \hat{Y}) \cdot QT_*2 \cdot (\hat{CX}, \hat{X}), \quad f \rightsquigarrow C(f),$$

étant continue d'après 4.15, F donne par passage au quotient un foncteur $\underline{F}: \frac{QT_*}{\sim} \rightarrow \frac{QT_*2}{\sim}$, qui est, bien sûr, lui aussi compatible avec les sommes. Notre proposition résulte maintenant du fait que les structures comultiplicatives dans $\frac{QT_*2}{\sim}$ définies par les $\mathfrak{L}_i$ sont les images de la structure de cogroupe de S_n dans $\frac{QT_*}{\sim}$ considérée dans 5.2 et 5.3.

5.5 Définition. Etant donné l'espace quasi-topologique pointé (X, x_0) , on définit $\pi_n(X, x_0)$ pour $n \geq 0$ comme étant l'ensemble pointé $\hat{X} \cdot \frac{QT_*}{\sim} \cdot S_n$, en considérant, si $n \geq 1$, sur cet ensemble la structure de groupe image par le foncteur $\text{Hom}^{\hat{X}}: (\frac{QT_*}{\sim})^* \rightarrow \text{Ens}$ (voir les remarques qui suivent le corollaire 1.3) de la structure de cogroupe dans $\frac{QT_*}{\sim}$ de S_n . Si $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ est une application continue pointée, on définit $\pi_n(f): \pi_n(\hat{X}) \rightarrow \pi_n(\hat{Y})$ comme étant l'application pointée

$$\text{Hom}(f, \mathfrak{L}_{S_n}): \hat{X} \cdot \frac{QT_*}{\sim} \cdot S_n \rightarrow \hat{Y} \cdot \frac{QT_*}{\sim} \cdot S_n.$$

5.6 Corollaire. Si $n \geq 2$, le groupe $\pi_n(\hat{X})$ est commutatif.

Comme application de la théorie générale des structures multiplicatives dans une catégorie (voir {19}), on a:

5.7 Corollaire. Pour $n \geq 1$, les $\pi_n(f)$ définissent des morphismes de groupes.

5.8 Corollaire. Les π_n définissent des foncteurs de $\frac{QT_*}{\sim}$ vers Ens_* , et aussi, si $n \geq 1$, de $\frac{nQT_*}{\sim}$ vers G (catégorie des groupes).

5.9 Définition. Etant donné la paire quasi-topologique pointée (X, A, x_0) , on définit $\pi_n(\hat{X}, \hat{A})$ pour $n \geq 1$ comme étant l'ensemble pointé $(\hat{X}, \hat{A}) \cdot \frac{QT_*2}{\sim} \cdot (CS_{n-1}, S_{n-1})$, en considérant, si $n \geq 2$, sur cet ensemble la structure de groupe image par le foncteur $\text{Hom}(\hat{X}, \hat{A}) : (\frac{QT_*2}{\sim})^* \rightarrow \text{Ens}$ de la structure de cogroupe dans $\frac{QT_*2}{\sim}$ de (CS_{n-1}, S_{n-1}) . Si $f: (\hat{X}, \hat{A}) \rightarrow (\hat{Y}, \hat{B})$ est un morphisme de QT_*2 , on définit $\pi_n(f)$ comme étant l'application pointée $\pi_n(\hat{X}, \hat{A}) \rightarrow \pi_n(\hat{Y}, \hat{B})$:

$$\text{Hom}(f, 1_{(CS_{n-1}, S_{n-1})}) : (\hat{X}, \hat{A}) \cdot \frac{QT_*2}{\sim} \cdot (CS_{n-1}, S_{n-1}) \rightarrow (\hat{Y}, \hat{B}) \cdot \frac{QT_*2}{\sim} \cdot (CS_{n-1}, S_{n-1}) .$$

5.10 Corollaire. Si $n \geq 3$, le groupe $\pi_n(\hat{X}, \hat{A})$ est commutatif.

5.11 Corollaire. Si $n \geq 2$, les $\pi_n(f)$ sont des morphismes de groupes.

5.12 Corollaire. Les π_n définissent des foncteurs de $\frac{QT_*2}{\sim}$ vers Ens_* , et aussi, si $n \geq 2$, de $\frac{QT_*2}{\sim}$ vers G .

5.13 Remarque. On voit facilement que, si $n \geq 1$, $\pi_n(X, x_0)$ est pointé en l'unité du groupe et que, si $n \geq 2$, $\pi_n(\hat{X}, \hat{A})$ est pointé en l'unité du groupe.

5.14 Proposition. Si (X, x_0) est un espace quasi-topologique pointé, soit $\pi_0(X, x_0)$ l'ensemble des composantes connexes par arcs de X , pointé en la composante de x_0 . Si $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ est une application continue pointée, on a une application pointée

$$\pi_0(f): \pi_0(X, x_0) \rightarrow \pi_0(Y, y_0), \quad |a| \mapsto |f(a)|$$

et, si f homotope à g dans QT_* , $\pi_0(f) = \pi_0(g)$.

Démonstration: $\pi_0(f)$ est bien définie, car, si $|a| = |b|$, il existe $n: [0, 1] \rightarrow X$ avec $n(0) = a$, $n(1) = b$ et alors $f \circ n: [0, 1] \rightarrow Y$ vérifie $f \circ n(0) = f(a)$, $f \circ n(1) = f(b)$, donc $|f(a)| = |f(b)|$. Enfin, si f est homotope à g dans QT_* , il existe $\xi: [0, 1] \rightarrow \hat{Y} \cdot QT_* \cdot \hat{X}$ avec $\xi(0) = f$, $\xi(1) = g$, et on peut définir l'application continue $\xi_a: [0, 1] \rightarrow Y$, $\xi_a(t) = \xi(t)(a)$. On a $\xi_a(0) = f(a)$, $\xi_a(1) = g(a)$, donc $|f(a)| = |g(a)|$.

5.15 Corollaire. π_0 est un foncteur de $\frac{QT_*}{\sim}$ vers Ens_* .

5.16 Proposition. Les foncteurs π_0 et $\pi_0: \frac{QT_*}{\sim} \rightarrow \text{Ens}_*$ sont naturellement équivalents.

Démonstration: Si (X, x_0) est un espace quasi-topologique pointé, soit $\xi_{\hat{X}}: \hat{X} \rightarrow \text{Hom}(\hat{X}, S_0)$ l'application pointée définie par

$$\xi_{\hat{X}}(x)(0) = x, \quad \xi_{\hat{X}}(x)(\omega) = x_0$$

(rappelons que $S_0 = (\{0, \omega\}, \omega)$, où $\{0\}$ et $\{\omega\}$ sont ouverts dans S_0). $\xi_{\hat{X}}$ est une bijection, l'inverse étant défini par $f \rightsquigarrow f(0)$. $\xi_{\hat{X}}$ est continu; en effet l'application $X \times S_0 \rightarrow X$, $(x, 0) \rightsquigarrow x$, $(x, \omega) \rightsquigarrow x_0$, est continue, car ses restrictions aux ouverts $X \times \{0\}$ et $X \times \{\omega\}$ de $X \times S_0$ le sont. L'inverse est trivialement continue, ce qui montre que $\xi_{\hat{X}}$ est un homéomorphisme et donne une bijection

$$\xi_{\hat{X}}: \pi_0(\hat{X}) \rightarrow \pi_0(\text{Hom}(\hat{X}, S_0)) = \hat{X} \cdot \frac{QT_*}{\sim} \cdot S_0 = \pi_0(\hat{X}).$$

On voit facilement que, si $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ est continue pointée, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \xrightarrow{\xi_{\hat{X}}} & \text{Hom}(\hat{X}, S_0) \\ f \downarrow & & \downarrow \text{Hom}(f, 1_{S_0}) \\ \hat{Y} & \xrightarrow{\xi_{\hat{Y}}} & \text{Hom}(\hat{Y}, S_0) \end{array}$$

qui, par passage au quotient, nous donne la naturalité de $\hat{X} \rightsquigarrow \xi_{\hat{X}}$.

On a un foncteur $J: QT_* \rightarrow QT_{*2}$ qui associe, à $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, $f: (X, \{x_0\}, x_0) \rightarrow (Y, \{y_0\}, y_0)$. Ce foncteur est compatible avec les sommes et les produits. De plus, l'application

$$\text{Hom}_{QT_*}(\hat{Y}, \hat{X}) \rightarrow \text{Hom}_{QT_{*2}}((\hat{Y}, \{\hat{y}_0\}), (\hat{X}, \{\hat{x}_0\}))$$

étant un homéomorphisme, le foncteur J donne, par passage au quotient, un foncteur $\underline{J}: \frac{QT_*}{\sim} \rightarrow \frac{QT_{*2}}{\sim}$, qui est un isomorphisme de $\frac{QT_*}{\sim}$ sur une sous-catégorie pleine de $\frac{QT_{*2}}{\sim}$. Pour chaque $n \geq 1$, on peut considérer sur $(S_n, \{\omega\})$ la structure de cogroupe dans $\frac{QT_{*2}}{\sim}$ image par J de la structure de cogroupe dans $\frac{QT_*}{\sim}$ de S_n . On voit alors facilement que la bijection canonique

$$\hat{X} \cdot \frac{QT_*}{\sim} \cdot S_n \rightarrow (\hat{X}, \{\hat{x}_0\}) \cdot \frac{QT_{*2}}{\sim} \cdot (S_n, \{\omega\})$$

définit un isomorphisme de groupes.

5.17 Proposition. Pour chaque $n \geq 1$, il existe un morphisme

$$\alpha_n: (CS_{n-1}, S_{n-1}) \rightarrow (S_n, \{\hat{\omega}\})$$

de QT_{*2} , défini par

$$t \circ \omega \sim \omega, \quad t \circ \theta_{n-1}(t_1, \dots, t_{n-1}) \sim \theta_n(t, t_1, \dots, t_{n-1}),$$

qui, si $n \geq 2$, définit un morphisme des structures de cogroupe dans QT_{*2} .

Démonstration: Il suffit de remarquer qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} CS_{n-1} \vee CS_{n-1} & \xrightarrow{\alpha_n \vee \alpha_n} & S_n \vee S_n \\ \uparrow \ell_1 & & \uparrow k_2 \\ CS_{n-1} & \xrightarrow{\alpha_n} & S_n \end{array}$$

(si $n \geq 2$), où k_2 et ℓ_1 ont été considérés dans les propositions 5.3 et 5.4.

5.18 Proposition. Si (X, x_0) est un espace quasi-topologique pointé, il existe, pour chaque $n \geq 1$, une application pointée

$$i_n: \pi_n(\hat{X}) \rightarrow \pi_n(\hat{X}, \{\hat{x}_0\}),$$

composée de la bijection canonique

$$\hat{X} \cdot \frac{QT_{*2}}{\sim} \cdot S_n \rightarrow (\hat{X}, \{\hat{x}_0\}) \cdot \frac{QT_{*2}}{\sim} \cdot (S_n, \{\hat{\omega}\})$$

avec (1 étant l'unité associée à $(\hat{X}, \{\hat{x}_0\})$)

$$\text{Hom}(1, \alpha_n): (\hat{X}, \{\hat{x}_0\}) \cdot \frac{QT_{*2}}{\sim} \cdot (S_n, \{\hat{\omega}\}) \rightarrow (\hat{X}, \{\hat{x}_0\}) \cdot \frac{QT_{*2}}{\sim} \cdot (CS_{n-1}, S_{n-1});$$

i_n est bijective et, si $n \geq 2$, elle définit un morphisme de groupes.

Démonstration: i_n est un morphisme de groupes si $n \geq 2$, d'après la proposition antérieure. Tout revient à démontrer que

$$\text{Hom}(1, \alpha_n): (\hat{X}, \{\hat{x}_0\}) \cdot \frac{QT_{*2}}{\sim} \cdot (S_n, \{\hat{\omega}\}) \rightarrow (\hat{X}, \{\hat{x}_0\}) \cdot \frac{QT_{*2}}{\sim} \cdot (CS_{n-1}, S_{n-1})$$

est bijective, ce qui sera vrai si l'on prouve que, dans QT_{*2} ,

$$\text{Hom}(1, \alpha_n): (\hat{X}, \{\hat{x}_0\}) \cdot QT_{*2} \cdot (S_n, \{\hat{\omega}\}) \rightarrow (\hat{X}, \{\hat{x}_0\}) \cdot QT_{*2} \cdot (CS_{n-1}, S_{n-1})$$

est un homéomorphisme. Or, il est bijectif; $\alpha_n: CS_{n-1} \rightarrow S_n$ définit dans S_n la quasi-topologie finale, car $I \times S_{n-1} \rightarrow S_n$,

$$(t, \theta_{n-1}(t_1, \dots, t_{n-1})) \sim \theta_n(t, t_1, \dots, t_{n-1}),$$

définit sur S_n la quasi-topologie finale, les applications

$$I^n \rightarrow I \times S_{n-1}, \quad (t, t_1, \dots, t_{n-1}) \sim (t, \theta_{n-1}(t_1, \dots, t_{n-1})),$$

et $I^n \rightarrow S_n$, $(t, t_1, \dots, t_{n-1}) \mapsto \theta_n(t, t_1, \dots, t_{n-1})$

définissant sur le deuxième espace la quasi-topologie finale; par suite l'application

$$\text{Hom}_{QT}(1_X, \alpha_n): X \cdot QT \cdot S_n \rightarrow X \cdot QT \cdot CS_{n-1}$$

défini dans le premier espace la quasi-topologie initiale (I 3.4), et, par restriction,

$$\text{Hom}(1, \alpha_n): (\hat{X}, \{\hat{x}_0\}) \cdot QT_{*2} \cdot (S_n, \{\omega\}) \rightarrow (\hat{X}, \{\hat{x}_0\}) \cdot QT_{*2} \cdot (CS_{n-1}, S_{n-1})$$

défini dans le premier espace la quasi-topologie initiale; $\text{Hom}(1, \alpha_n)$ est donc un homéomorphisme.

5.19 Corollaire. Si $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ est une application continue pointée, alors on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(\hat{X}) & \xrightarrow{\pi_n(f)} & \pi_n(\hat{Y}) \\ \downarrow \downarrow_n & & \downarrow \downarrow_n \\ \pi_n(\hat{X}, \{\hat{x}_0\}) & \xrightarrow{\pi_n(J(f))} & \pi_n(\hat{Y}, \{\hat{y}_0\}) \end{array}$$

Avant de terminer ce paragraphe, regardons le rapport des groupes d'homotopie, tels qu'on les définit ici, avec les groupes d'homotopie d'un espace topologique pointé, tels qu'ils sont définis d'habitude.

La sphère topologique S'_n ($n \geq 1$) est munie d'une structure de cogroupe dans la catégorie $\frac{QT}{\sim}^*$, structure qui est définie par les mêmes expressions qui définissent la structure de cogroupe de S_n dans $\frac{QT}{\sim}^*$ (voir 5.2 et 5.3). Si (X, x_0) est un espace topologique pointé, son n -ième groupe d'homotopie "habituel", notons-le $\pi_n^*(\bar{X})$, est l'image par le foncteur

$$\text{Hom}^{\hat{X}}: \left(\frac{QT}{\sim}\right)^* \rightarrow \text{Ens}$$

du cogroupe sur S'_n .

Considérant l'application continue pointée $\text{id}: S_n \rightarrow S'_n$ ($n \geq 0$), on sait que son image canonique $|\text{id}|$ dans $\frac{QT}{\sim}^*$ est inversible (4.32) et induit donc, pour chaque espace quasi-topologique pointé (X, x_0) , une bijection

$$\hat{X} \cdot \frac{QT}{\sim}^* \cdot S'_n \rightarrow \hat{X} \cdot \frac{QT}{\sim}^* \cdot S_n$$

qui, si $n \geq 1$, définit un isomorphisme de groupes. (S'_n "est" aussi un cogroupe dans $\frac{\mathcal{OT}^*}{\sim}$, l'inclusion

$$\frac{\mathcal{I}^*}{\sim} \rightarrow \frac{\mathcal{OT}^*}{\sim}$$

étant compatible avec les sommes d'espaces séparés, compte tenu de 5.1). En particulier, si (X, x_0) est topologique, on a donc un isomorphisme canonique entre $\pi_n(\hat{X})$ et $\pi'_n(\hat{X})$.

On peut voir aussi que, pour une paire topologique pointée (X, A, x_0) , on a un isomorphisme entre $\pi_n(\hat{X}, \hat{A})$ et $\pi'_n(\hat{X}, \hat{A})$; il suffit par exemple de tenir compte des résultats 7.9 et 7.10 plus loin et des résultats analogues dans le cas topologique.

6. Quelques lemmes sur les espaces I^n

Dans ce paragraphe on va établir un certain nombre de lemmes sur les espaces I^n , qui nous seront nécessaires dans la suite. Ces lemmes sont tous bien connus et souvent utilisés en Topologie algébrique, plus ou moins implicitement. Il est intéressant de les exposer ici pour pouvoir facilement s'y référer.

On représente par P_n ($n \geq 1$) le point $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}) \in I^n$.

6.1 Lemme. Soit $n \geq 1$ et soit

$$\frac{I^n \times I}{I^n \times \{0\}}$$

le quotient topologique (voir la fin du premier chapitre). Il existe un homéomorphisme

$$A: \frac{I^n \times I}{I^n \times \{0\}} \rightarrow I^n, \quad |(x, t)| \rightsquigarrow P_n + t(x - P_n),$$

qui applique $|(x, 1)|$ sur x et $|(x, 0)|$ sur P_n .

Démonstration: L'application de l'énoncé est bien définie et continue, et, le premier espace étant compact et le second séparé, il nous

suffit de voir qu'elle est bijective. Or, elle admet comme inverse

$$B: I^n \rightarrow \frac{\dot{I}^n \times I}{\dot{I}^n \times \{0\}} \quad , \quad B(x) = \begin{cases} |(P_n + \frac{1}{2M}(x - P_n), 2M)|, & \text{si } x \neq P_n \\ |(P_n, 0)|, & \text{si } x = P_n, \end{cases}$$

où $M = \max_i |x_i - \frac{1}{2}|$.

6.2 Définition. Pour chaque $0 < \delta \leq 1$, on définit

$$I_\delta^n = \{(t_1, \dots, t_n) \in I^n / \max_i |t_i - \frac{1}{2}| \leq \frac{\delta}{2}\},$$

$$\dot{I}_\delta^n = \{(t_1, \dots, t_n) \in I^n / \max_i |t_i - \frac{1}{2}| = \frac{\delta}{2}\}.$$

Remarquons que $I_1^n = I^n$, $\dot{I}_1^n = \dot{I}^n$. On appellera $I_{\frac{1}{2}}^n$ la moitié centrale du cube I^n .

6.3 Lemme. Si $n \geq 1$, il existe, pour chaque $0 < \delta \leq 1$, un homéomorphisme $C_\delta: \dot{I}^{n+1} \rightarrow \dot{I}^{n+1}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} C_\delta(A(|x, t|), 0) = \begin{cases} (A(|x, \frac{2t}{\delta}|), 0), & 0 \leq t \leq \frac{\delta}{2} \\ (x, \frac{2t}{\delta} - 1), & \frac{\delta}{2} \leq t \leq \delta \\ (A(|x, 1-t+\delta|), 1), & \delta \leq t \leq 1 \end{cases} \\ C_\delta(y, t') = (A(|y, \delta - \frac{\delta t'}{2}|), 1) \\ C_\delta(A(|x, t|), 1) = (A(|x, \frac{\delta t}{2}|), 1) \end{array} \right.$$

Démonstration: On voit facilement que C_δ est bien défini et continu; pour voir qu'il s'agit d'un homéomorphisme, il suffit de voir qu'il admet l'inverse $C'_\delta: \dot{I}^{n+1} \rightarrow \dot{I}^{n+1}$ défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} C'_\delta(A(|x, t|), 0) = (A(|x, \frac{\delta t}{2}|), 0) \\ C'_\delta(y, t') = (A(|y, (t'+1)\frac{\delta}{2}|), 0) \\ C'_\delta(A(|x, t|), 1) = \begin{cases} (A(|x, \frac{2t}{\delta}|), 1), & 0 \leq t \leq \frac{\delta}{2} \\ (x, 2 - \frac{2t}{\delta}), & \frac{\delta}{2} \leq t \leq \delta \\ (A(|x, 1-t-\delta|), 0), & \delta \leq t \leq 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

Remarquons que l'homéomorphisme $C_\delta: \dot{I}^{n+1} \rightarrow \dot{I}^{n+1}$ applique

$$\dot{I}_\delta^n \times \{0\} \text{ sur } I^n \times \{0\} \cup \dot{I}^n \times I,$$

$$\dot{I}_\delta^n \times \{0\} \text{ sur } \dot{I}^n \times \{1\},$$

$$\begin{aligned} I^n \times \{1\} \cup I^n \times I & \text{ sur } I_\delta^n \times \{1\} , \\ I^n \times \{0\} & \text{ sur } I_\delta^n \times \{1\} , \\ I^n \times \{1\} & \text{ sur } I_\delta^n \times \{1\} , \\ I^n \times \{1\} & \text{ sur } I_{\frac{\delta}{2}}^n \times \{1\} . \end{aligned}$$

6.4 Lemme. La paire quasi-topologique $(I^{n+1}, I^n \times \{0\} \cup I^n \times I)$ est isomorphe à la paire $(I^{n+1}, I^n \times \{0\})$, $n \geq 0$.

Démonstration: Le cas $n = 0$ est trivial ($I^0 = \emptyset$). Supposant $n \geq 1$, on peut considérer l'homéomorphisme $C_1: I^{n+1} \rightarrow I^{n+1}$ qui applique $I^n \times \{0\}$ sur $I^n \times \{0\} \cup I^n \times I$ et définir un homéomorphisme $D: I^{n+1} \rightarrow I^{n+1}$ prolongeant C_1 par

$$D(A(|x, t|)) = A(|C_1(x), t|) ;$$

alors D est un isomorphisme :

$$(I^{n+1}, I^n \times \{0\}) \rightarrow (I^{n+1}, I^n \times \{0\} \cup I^n \times I) .$$

Si X est un espace quasi-topologique et $A \subset X$, on dit que A est un *rétracte* de X s'il existe une application continue $r: X \rightarrow A$ telle que $r \circ i = 1_A$ ($i: A \rightarrow X$ étant l'inclusion), c'est-à-dire telle que $r(x) = x$, si $x \in A$. Alors, toute application continue $f: A \rightarrow Y$, où Y est un espace quasi-topologique quelconque, est prolongeable à X , c'est-à-dire il existe $\bar{f}: X \rightarrow Y$ continue telle que $\bar{f}|_A = f$. En effet, il suffit de prendre $\bar{f} = f \circ r$.

6.5 Corollaire. Pour $n \geq 0$, $I^n \times \{0\} \cup I^n \times I$ est un rétracte de I^{n+1} .

Démonstration: Il suffit d'utiliser le fait que $I^n \times \{0\}$ est un rétracte de I^{n+1} ($(t_1, \dots, t_{n+1}) \rightsquigarrow (t_1, \dots, t_n, 0)$) et le lemme antérieur.

6.6 Corollaire. Pour $n \geq 0$, l'inclusion $i: I^n \rightarrow I^{n+1}$ est une cofibration.

Démonstration: Ceci résulte du corollaire antérieur et de I 2.6.

6.7 Lemme. La paire $(I \times I, \{0\} \times I \cup I \times \{0\})$ est isomorphe à la paire $(I \times I, I \times \{0\})$.

Démonstration: Soit $\xi: \dot{I}^2 \rightarrow \dot{I}^2$ défini par: $(t,0) \rightsquigarrow (\frac{1+t}{2}, 0)$, $(0,t') \rightsquigarrow (\frac{1-t'}{2}, 0)$, $(1,t') \rightsquigarrow (1,t')$ et

$$(t,1) \rightsquigarrow \begin{cases} (0,2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (2t-1,1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

On voit que ξ est bien défini et continu et c'est un homéomorphisme, car il admet l'inverse $\xi': \dot{I}^2 \rightarrow \dot{I}^2$ défini par: $(0,t') \rightsquigarrow (\frac{t'}{2}, 1)$, $(t,1) \rightsquigarrow (\frac{t+1}{2}, 1)$, $(1,t') \rightsquigarrow (1,t')$ et

$$(t,0) \rightsquigarrow \begin{cases} (0,1-2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (2t-1,0), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

On a $\xi(I \times \{0\} \cup \{0\} \times I) = I \times \{0\}$. On peut maintenant prolonger ξ en un homéomorphisme $\bar{\xi}: I^2 \rightarrow I^2$ par $\bar{\xi}(A(|x,t|)) = A(|\xi(x),t|)$, et alors

$$\bar{\xi}: (I^2, \{0\} \times I \cup I \times \{0\}) \rightarrow (I^2, I \times \{0\})$$

est un isomorphisme de paires.

Appelons *triplet quasi-topologique pointé* un système (X, A_1, A_2, x_0) , où X est un espace quasi-topologique, $x_0 \in A_2 \subset A_1 \subset X$. Soit $\mathcal{QT}_*^3$ la catégorie dont les objets sont les espaces quasi-topologiques pointés et dont les morphismes de (X, A_1, A_2, x_0) vers (Y, B_1, B_2, y_0) sont définis par les applications continues $f: X \rightarrow Y$ telles que $f(x_0) = y_0$, $f(A_1) \subset B_1$, $f(A_2) \subset B_2$. C'est une catégorie pointée et canoniquement munie d'une structure de catégorie $p_{\mathcal{QT}}$ -dominée.

6.8 Lemme. $1_{I^2}: (I^2, \dot{I}^2, \{0\} \times I, (0,0)) \rightarrow (I^2, \dot{I}^2, I \times \{0\} \cup I \times I, (0,0))$ détermine un élément inversible de $\frac{\mathcal{QT}_*^3}{\sim}$.

Démonstration: Soit $H: \dot{I}^2 \times I \rightarrow \dot{I}^2$ défini par

$$H(t,1,t'') = \begin{cases} (t(1+2t''), 1), & t \leq \frac{1}{1+2t''} \\ (1, 2-t(1+2t'')), & \frac{1}{1+2t''} \leq t \leq \frac{2}{1+2t''} \\ (3-t(1+2t''), 0), & \frac{2}{1+2t''} \leq t \end{cases},$$

$$H(1,t',t'') = \begin{cases} (1, (1+t')(1-t'')-1), & t'' \leq 1 - \frac{1}{1+t'}, \\ ((1+t')(1-t''), 0), & t'' \geq 1 - \frac{1}{1+t'}, \end{cases},$$

$$H(t,0,t'') = (t(1-t''), 0),$$

$$H(0, t', t'') = (0, t') .$$

On montre que H est bien défini et donc continu . On définit alors $\bar{H}: I^2 \times I \rightarrow I^2$ par

$$\bar{H}(A(|x, \tilde{t}|), t'') = A(|H(x, t''), \tilde{t}|) .$$

La continuité de $\bar{H}$ résulte essentiellement du fait que I est localement compact séparé, ce qui entraîne que $(\dot{I}^2 \times I) \times I \rightarrow \frac{\dot{I}^2 \times I}{\dot{I}^2 \times \{0\}} \times I$ définit dans le deuxième espace la topologie finale (voir, par exemple, 4.3.2 de [14]). On voit que $\bar{H}$ applique $\dot{I}^2 \times I$ dans $\dot{I}^2$, $(\{0\} \times I) \times I$ dans $\{0\} \times I$, $(I \times \{0\}) \cup \dot{I} \times I \times I$ dans $I \times \{0\} \cup \dot{I} \times I$ et $(0, 0, t'')$ sur $(0, 0)$. Enfin, comme

$$\bar{H}((I \times \{0\}) \cup \dot{I} \times I \times \{1\}) \subset \{0\} \times I ,$$

on peut définir

$h: (I^2, \dot{I}^2, I \times \{0\} \cup \dot{I} \times I, (0, 0)) \rightarrow (I^2, \dot{I}^2, \{0\} \times I, (0, 0))$, $h(x) = \bar{H}(x, 1)$, et $\bar{H}$ définit des homotopies de hol_X et $l_X \circ h$ sur les identités, ce qui montre que $|h|$ est un inverse de $|l_X|$ dans $\frac{QT \times 3}{\sim}$.

7. Suites exactes d'homotopie d'une fibration et d'une paire

La théorie qu'on présente de la suite exacte d'homotopie d'une fibration pourrait aussi bien être faite pour les fibrations de Serre (concept plus faible que celui de fibration). On se borne à considérer les fibrations, cela nous suffisant dans la suite, pour ne pas alourdir l'exposé.

7.1 Définition. Si X est un espace quasi-topologique et $A, B \subset X$, on représente par $E(X, A, B)$ l'ensemble des chemins continus $\xi: [0, 1] \rightarrow X$ tels que $\xi(0) \in A$, $\xi(1) \in B$ muni de la quasi-topologie de la convergence locale. Si A ou B a un seul élément x , on note x à la place de $\{x\}$.

7.2 Proposition. Si X est un espace quasi-topologique, il existe une fibration $p: E(X, X, X) \rightarrow X \times X$ définie par $\xi \mapsto (\xi(0), \xi(1))$.

Démonstration: On sait, d'après 6.6, que l'inclusion $i: \{0, 1\} \rightarrow [0, 1]$ est une cofibration; donc, en tenant compte de 3.16, on a une fibration

$$Hom(1_X, i): X \cdot QT \cdot [0, 1] \rightarrow X \cdot QT \cdot \{0, 1\} .$$

Mais, $\{0, 1\}$ ayant la quasi-topologie finale définie par les inclusions

$$i_0: \{0\} \rightarrow \{0,1\} , \quad i_1: \{1\} \rightarrow \{0,1\}$$

(car $\{0\}$ et $\{1\}$ sont ouverts dans $\{0,1\}$), $\text{Hom}(X, \{0,1\})$ aura la quasi-topologie initiale définie par les

$$q_0: X \cdot QT \cdot \{0,1\} \rightarrow X \cdot QT \cdot \{0\} , \quad q_1: X \cdot QT \cdot \{0,1\} \rightarrow X \cdot QT \cdot \{1\} ,$$

$q_0(\xi) = \xi(0)$, $q_1(\xi) = \xi(1)$, qui définissent $X \cdot QT \cdot \{0,1\}$ comme produit de $X \cdot QT \cdot \{0\}$ et $X \cdot QT \cdot \{1\}$ ($\{0,1\}$ étant une somme de $\{0\}$ et $\{1\}$). Si l'on tient compte des homéomorphismes

$$\text{Hom}(X, \{0\}) \rightarrow X , \quad \xi \mapsto \xi(0) , \text{ et } \text{Hom}(X, \{1\}) \rightarrow X , \quad \xi \mapsto \xi(1) ,$$

on voit qu'il existe un homéomorphisme

$$\text{Hom}(X, \{0,1\}) \rightarrow X \times X , \quad \xi \mapsto (\xi(0), \xi(1)) ;$$

composant celui-ci avec la fibration

$$\text{Hom}(1_X, 1): E(X, X, X) \rightarrow \text{Hom}(X, \{0,1\}) ,$$

on obtient l'application p de l'énoncé.

7.3 Corollaire. Si $A, B \subset X$, on a une fibration

$$p_{/}: E(X, A, B) \rightarrow A \times B .$$

Démonstration: En effet, on a $E(X, A, B) = p^{-1}(A \times B)$ et on tient compte de 3.7 .

7.4 Corollaire. Avec les conditions antérieures, on a des fibrations

$$p_0: E(X, A, B) \rightarrow A , \quad p_1: E(X, A, B) \rightarrow B , \quad p_0(\xi) = \xi(0) , \quad p_1(\xi) = \xi(1) .$$

Démonstration: Il suffit de composer la fibration $p_{/}$ du corollaire antérieur avec les projections $A \times B \rightarrow A$, $A \times B \rightarrow B$ qui sont des fibrations (1.18) .

7.5 Proposition. Soit $p: X \rightarrow B$ une fibration, soit $p(x_0) = b_0$. Il existe alors une fibration

$$p^*: E(X, \{x_0\}, X) \rightarrow E(B, \{b_0\}, B) , \quad p^*(\xi) = p \circ \xi .$$

Démonstration: On voit facilement que p^* est continue. Soient Y un espace quasi-topologique, et les applications continues

$$F: Y \times I \rightarrow E(B, b_0, B) , \quad g: Y \times \{0\} \rightarrow E(X, x_0, X)$$

(on écrit b_0 à la place de $\{b_0\}$) telles que $p^*og = F/Y \times \{0\}$; on doit voir qu'il existe une application continue $G: Y \times I \rightarrow E(X, x_0, X)$, telle que

$$g = G/Y \times \{0\} , \quad p^*oG = F ,$$

$$\begin{array}{ccc} & & E(X, x_0, X) \\ & \nearrow g & \downarrow p^* \\ Y \times \{0\} \subset Y \times I & \xrightarrow{G} & E(B, b_0, B) \\ & \searrow F & \end{array}$$

c'est-à-dire qu'il existe une application continue $\bar{G}: Y \times I \times I \rightarrow X$ avec

$$\bar{G}(x, t, 0) = x_0 , \quad \bar{G}(x, 0, t') = g(x, 0)(t') , \quad p(\bar{G}(x, t, t')) = F(x, t)(t') .$$

Mais on a des applications continues

$$\bar{F}: Y \times I \times I \rightarrow B , \quad (x, t, t') \rightsquigarrow F(x, t)(t') ,$$

$$\bar{g}: Y \times \{0\} \times I \rightarrow X , \quad (x, 0, t') \rightsquigarrow g(x, 0)(t') ,$$

donc aussi $\bar{\bar{g}}: Y \times (\{0\} \times I \cup I \times \{0\}) \rightarrow X$ prolongeant $\bar{g}$ par $(x, t, 0) \rightsquigarrow x_0$; les conditions qu'on impose à $\bar{G}$ sont

$$p \circ \bar{G} = \bar{F} , \quad \bar{\bar{g}} = \bar{G}/Y \times (\{0\} \times I \cup I \times \{0\}) ;$$

comme $p: X \rightarrow B$ est une fibration et comme $(Y \times I \times I, Y \times (\{0\} \times I \cup I \times \{0\}))$ est une paire isomorphe à $(Y \times I \times I, Y \times I \times \{0\})$ d'après 6.7 , l'existence d'un tel $\bar{G}$ est assurée.

7.6 Corollaire. Dans les conditions de la proposition antérieure, si $A \subset B$ on a une fibration

$$p^*: E(X, x_0, p^{-1}(A)) \rightarrow E(B, b_0, A) .$$

7.7 Proposition. Soit $p: X \rightarrow B$ une fibration, soit $p(x_0) = b_0$. Il existe alors une fibration

$$p^*: E(X, x_0, x_0) \rightarrow E(B, b_0, b_0) , \quad p^*(\xi) = p \circ \xi .$$

Démonstration: On voit facilement que p^* est continue. Soient Y , espace quasi-topologique, et les applications continues

$$F: Y \times I \rightarrow E(B, b_0, b_0) , \quad g: Y \times \{0\} \rightarrow E(X, x_0, x_0)$$

telles que $p^*og = F/Y \times \{0\}$; on doit voir qu'il existe $G: Y \times I \rightarrow E(X, x_0, x_0)$ telle que $g = G/Y \times \{0\}$, $p^*oG = F$, c'est-à-dire qu'il existe une application continue $\bar{G}: Y \times I \times I \rightarrow X$ avec $\bar{G}(x, t, 0) = \bar{G}(x, t, 1) = x_0$, $\bar{G}(x, 0, t') = g(x, 0)(t')$, $p(\bar{G}(x, t, t')) = F(x, t)(t')$.

Mais on a des applications continues

$$\bar{F}: Y \times I \times I \rightarrow B, \quad (x, t, t') \rightsquigarrow F(x, t)(t'),$$

$$\bar{g}: Y \times \{0\} \times I \rightarrow X, \quad (x, 0, t') \rightsquigarrow g(x, 0)(t'),$$

donc aussi une application continue $\bar{\bar{g}}: Y \times (\{0\} \times I \cup I \times \dot{I}) \rightarrow X$ prolongeant $\bar{g}$ par $(x, t, 0) \rightsquigarrow x_0$, $(x, t, 1) \rightsquigarrow x_0$; les conditions qu'on impose à $\bar{G}$ sont

$$p \circ \bar{G} = \bar{F}, \quad \bar{\bar{g}} = \bar{G} /_{Y \times (\{0\} \times I \cup I \times \dot{I})};$$

puisque $p: X \rightarrow B$ est une fibration et que $(Y \times I \times I, Y \times (\{0\} \times I \cup I \times \dot{I}))$ est une paire isomorphe à $(Y \times I \times I, Y \times I \times \{0\})$ (d'après 6.4), l'existence d'un tel $\bar{G}$ est assurée.

Rappelons qu'une suite de deux applications pointées

$$(A, a) \xrightarrow{f} (B, b) \xrightarrow{g} (C, c)$$

est dite *exacte* si $f(A) = g^{-1}(c)$ et qu'une suite plus longue est dite *exacte* s'il en est ainsi de chaque suite partielle du type antérieur.

7.8 Lemme. Soit (X, A, x_0) une paire quasi-topologique pointée; il existe un homéomorphisme

$$\bar{\gamma}_n: \text{Hom}(\hat{E}(X, x_0, A), S_n) \rightarrow \text{Hom}((\hat{X}, \hat{A}), (CS_n, S_n))$$

qui est pointé (on considère $\hat{E}(X, x_0, A) = (E(X, x_0, A), \hat{x}_0)$, où $\hat{x}_0$ est le chemin de valeur constant x_0) et associe, à $f: S_n \rightarrow \hat{E}(X, x_0, A)$,

$$\bar{f}: (CS_n, S_n) \rightarrow (\hat{X}, \hat{A}), \quad \bar{f}(t \circ x) = f(x)(t).$$

Démonstration: Il est facile de voir que $\bar{f}$ est bien un élément de $(\hat{X}, \hat{A}) \cdot QT_{*2} \cdot (CS_n, S_n)$ et que $\bar{\gamma}_n$ est continue, car il en est ainsi de l'application associée $\text{Hom}(\hat{E}(X, x_0, A), S_n) \times CS_n \rightarrow X$, l'application $\text{Hom}(\hat{E}(X, x_0, A), S_n) \times (I \times S_n) \rightarrow X$ étant continue. Si $g: (CS_n, S_n) \rightarrow (\hat{X}, \hat{A})$ est un morphisme de QT_{*2} , il existe une application continue pointée $\underline{g}: S_n \rightarrow \hat{E}(X, x_0, A)$ définie par $\underline{g}(x)(t) = g(t \circ x)$ et on voit que l'application

$$\text{Hom}((\hat{X}, \hat{A}), (CS_n, S_n)) \rightarrow \text{Hom}(\hat{E}(X, x_0, A), S_n), \quad \varepsilon \rightsquigarrow \underline{g},$$

est continue (car l'application correspondante

$$\text{Hom}((\hat{X}, \hat{A}), (CS_n, S_n)) \times S_n \rightarrow E(X, x_0, A)$$

est continue, l'application correspondante

$$\text{Hom}((\hat{X}, \hat{A}), (CS_n, S_n)) \times S_n \times I \rightarrow X$$

étant continue) et est un inverse de $\bar{\gamma}_n$.

7.9 Corollaire. Dans les conditions du lemme antérieur, $\bar{\gamma}_n$ induit par passage au quotient une bijection pointée

$$\gamma_n: \pi_n(\hat{E}(X, x_0, A)) \rightarrow \pi_{n+1}(\hat{X}, \hat{A}).$$

7.10 Proposition. Si $n \geq 1$, γ_n définit un isomorphisme de groupes.

Démonstration: Si $f, g: S_n \rightarrow \hat{E}(X, x_0, A)$, il résulte de 5.3 (avec $i = 1$) que $|f| \cdot |g| = |h|$, où $h: S_n \rightarrow \hat{E}(X, x_0, A)$ est défini par

$$h(\theta_n(t_1, \dots, t_n)) = \begin{cases} f(\theta_n(2t_1, t_2, \dots, t_n)), & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(\theta_n(2t_1-1, t_2, \dots, t_n)), & \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}.$$

Alors $\gamma_n(|f|) = |\bar{f}|$, $\gamma_n(|g|) = |\bar{g}|$, $\gamma_n(|h|) = |\bar{h}|$ et on a

$$\bar{h}(t \otimes \theta_n(t_1, \dots, t_n)) = h(\theta_n(t_1, \dots, t_n))(t) = \begin{cases} f(\theta_n(2t_1, \dots, t_n))(t), & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(\theta_n(2t_1-1, \dots, t_n))(t), & \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases},$$

donc

$$\bar{h}(t \otimes \theta_n(t_1, \dots, t_n)) = \begin{cases} \bar{f}(t \otimes \theta_n(2t_1, t_2, \dots, t_n)), & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ \bar{g}(t \otimes \theta_n(2t_1-1, t_2, \dots, t_n)), & \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases},$$

donc, compte tenu de 5.4 (avec $i = 1$), on a $|\bar{h}| = |\bar{f}| \cdot |\bar{g}|$.

7.11 Proposition. Si $f: (\hat{X}, \hat{A}) \rightarrow (\hat{Y}, \hat{B})$ est un morphisme de $\mathcal{QT}_{*2}$, il existe une application continue pointée

$$E(f): \hat{E}(X, x_0, A) \rightarrow \hat{E}(Y, y_0, B), \quad \xi \mapsto f \circ \xi$$

et on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(\hat{E}(X, x_0, A)) & \xrightarrow{\pi_n(E(f))} & \pi_n(\hat{E}(Y, y_0, B)) \\ \gamma_n \downarrow & & \downarrow \gamma_n \\ \pi_{n+1}(\hat{X}, \hat{A}) & \xrightarrow{\pi_{n+1}(f)} & \pi_{n+1}(\hat{Y}, \hat{B}) \end{array}.$$

Démonstration: Il suffit de voir qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \hat{E}(X, x_0, A) \cdot \mathcal{QT}_{*2} \cdot S_n & \xrightarrow{\text{Hom}(E(f), 1_{S_n})} & \hat{E}(Y, y_0, B) \cdot \mathcal{QT}_{*2} \cdot S_n \\ \bar{\gamma}_n \downarrow & & \downarrow \bar{\gamma}_n \\ (\hat{X}, \hat{A}) \cdot \mathcal{QT}_{*2} \cdot (CS_n, S_n) & \xrightarrow{\text{Hom}(f, 1_{S_n})} & (\hat{Y}, \hat{B}) \cdot \mathcal{QT}_{*2} \cdot (CS_n, S_n) \end{array}$$

ce qui se vérifie facilement.

7.12 Lemme. Soit $p:(X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ une application continue pointée telle que $p:X \rightarrow B$ soit une fibration dans $\mathcal{QT}$. Soit $F = p^{-1}(b_0)$, soit $i:(F, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ l'inclusion. Alors on a une suite exacte d'ensembles pointés

$$\pi_0(\hat{F}) \xrightarrow{\pi_0(i)} \pi_0(\hat{X}) \xrightarrow{\pi_0(p)} \pi_0(\hat{B}) .$$

Démonstration: On a $p \circ i = 0:(F, x_0) \rightarrow (B, b_0)$, donc

$$\pi_0(p) \circ \pi_0(i) = \pi_0(p \circ i) = 0 ,$$

ce qui montre que $\text{im}(\pi_0(i)) \subset (\pi_0(p))^{-1}(|b_0|)$. Soit donc $|x| \in \pi_0(\hat{X})$ avec $\pi_0(p)(|x|) = |b_0|$, c'est-à-dire $|p(x)| = |b_0|$. Il existe une application continue $\xi:[0,1] \rightarrow B$ avec $\xi(0) = p(x)$, $\xi(1) = b_0$; définissant $g:\{0\} \rightarrow X$, $g(0) = x$, on aura $p \circ g = \xi|_{\{0\}}$; par définition d'une fibration, il existe $\bar{\xi}:[0,1] \rightarrow X$ prolongeant g et vérifiant $p \circ \bar{\xi} = \xi$; par suite $\bar{\xi}(0) = x$, $\bar{\xi}(1) \in F$, ce qui entraîne $|x| = |\bar{\xi}(1)| = \pi_0(i)(|\bar{\xi}(1)|)$, d'où $|x| \in \text{im}(\pi_0(i))$.

7.13 Proposition. Soit $p:(X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ une application continue pointée telle que $p:X \rightarrow B$ soit une fibration dans $\mathcal{QT}$; soit $F = p^{-1}(b_0)$ la fibre, soit $\hat{F} = (F, x_0)$.

Si $\xi:S_1 \rightarrow \hat{B}$ est une application continue pointée et $a \in F$, il existe $\bar{\xi}:[0,1] \rightarrow \hat{X}$ tel que $\bar{\xi}(0) = a$, $p(\bar{\xi}(t)) = \xi(\theta_1(t))$. Soit $\bar{a} = \bar{\xi}(1) \in F$. Alors, étant donné $\xi':S_1 \rightarrow \hat{B}$ homotope à ξ et $a' \in F$, $a' \sim a$ dans F , si $\bar{a}'$ est l'élément construit à partir de ξ' et a' , on a $\bar{a}' \sim \bar{a}$ dans F .

L'application

$$\eta:\pi_0(\hat{F}) \times \pi_1(\hat{B}) \rightarrow \pi_0(\hat{F}), \quad (|a|, |\xi|) \mapsto |\bar{a}| ,$$

définit $\pi_1(\hat{B})$ comme groupe d'opérateurs à droite sur $\pi_0(\hat{F})$.

Démonstration: L'existence d'un tel $\bar{\xi}$ résulte du fait que p est une fibration et $p(a) = x_0 = \xi(\theta_1(0))$. Étant donné ξ' homotope à ξ et $a' \sim a$ dans F , à partir desquels on a construit $\bar{\xi}'$, soit $\alpha:[0,1] \rightarrow F$ avec $\alpha(0) = a$, $\alpha(1) = a'$. Soit $H:I^2 \rightarrow B$ avec

$$H(t, 0) = \xi(\theta_1(t)), \quad H(t, 1) = \xi'(\theta_1(t)), \quad H(0, t') = b_0, \quad H(1, t') = b_0$$

(construit à partir de l'homotopie de ξ vers ξ'). Soit

$$\dot{H}:\{0\} \times I \times I \rightarrow X, \quad \dot{H}(0, t') = \alpha(t'), \quad \dot{H}(t, 0) = \bar{\xi}(t), \quad \dot{H}(t, 1) = \bar{\xi}'(t) .$$

Puisque p est une fibration et que la paire $(I^2, \{0\} \times I \cup I \times \dot{I})$ est isomorphe à la paire $(I^2, I \times \{0\})$, il existe $\bar{H}: I^2 \rightarrow X$ prolongeant $\dot{H}$ et tel que $p \circ \bar{H} = H$. Si on définit $\alpha': [0, 1] \rightarrow F$, $\alpha'(t') = \bar{H}(1, t')$, on a $\alpha'(0) = \bar{a}$, $\alpha'(1) = \bar{a}'$, d'où $\bar{a} \sim \bar{a}'$ dans F . Si $\xi = \hat{*}$, on peut choisir $\bar{\xi} = \hat{a}$, donc $\bar{a} = a$, ce qui montre que $\eta(x, 1) = x$. Etant donné $\xi, \xi': S_1 \rightarrow \hat{B}$, on a $|\xi| \cdot |\xi'| = |\xi''|$ avec $\xi'': S_1 \rightarrow \hat{B}$,

$$\xi''(\theta_1(t)) = \begin{cases} \xi(\theta_1(2t)), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \xi'(\theta_1(2t-1)), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases};$$

si $a \in F$, on peut considérer $\bar{\xi}: [0, 1] \rightarrow X$ avec

$$\bar{\xi}(0) = a, \quad p(\bar{\xi}(t)) = \xi(\theta_1(t)), \quad \bar{\xi}(1) = \bar{a},$$

et $\bar{\xi}': [0, 1] \rightarrow X$ avec

$$\bar{\xi}'(0) = \bar{a}, \quad p(\bar{\xi}'(t)) = \xi'(\theta_1(t)), \quad \bar{\xi}'(1) = \bar{a}';$$

si $\bar{\xi}'': [0, 1] \rightarrow X$ est défini par

$$\bar{\xi}''(t) = \begin{cases} \bar{\xi}(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \bar{\xi}'(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases},$$

on a $\bar{\xi}''(0) = a$, $p(\bar{\xi}''(t)) = \xi''(\theta_1(t))$, $\bar{\xi}''(1) = \bar{a}$, ce qui montre que

$$\eta(|a|, |\xi| \cdot |\xi'|) = \eta(\eta(|a|, |\xi|), |\xi'|).$$

7.14 Proposition. *Sous les conditions de la proposition antérieure on a:*

1) $\eta(*, x) = *$ si, et seulement si, $x = \pi_1(p)(y)$, $y \in \pi_1(\hat{X})$.

2) Si $i: (F, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ est l'inclusion, on a, pour $|a|, |b| \in \pi_0(\hat{F})$, $\pi_0(i)(|a|) = \pi_0(i)(|b|)$ si, et seulement si, il existe $|\xi| \in \pi_1(\hat{B})$ avec $\eta(|a|, |\xi|) = |b|$.

Démonstration: 1) Si $x = \pi_1(p)(y)$, $y = |\xi| \in \pi_1(\hat{X})$, on a $x = |p \circ \xi|$; pour trouver $\eta(*, x)$ ($* = |x_0|$), on peut choisir $\xi \circ \theta_1$ pour $\bar{\xi}$; alors $\bar{x}_0 = x_0$, donc $\eta(*, x) = *$. Soit réciproquement $\xi: S_1 \rightarrow \hat{B}$ tel que $\eta(*, |\xi|) = *$. Considérant $\bar{\xi}: [0, 1] \rightarrow X$ avec

$$\bar{\xi}(0) = x_0, \quad p(\bar{\xi}(t)) = \xi(\theta_1(t)),$$

on a $|\bar{\xi}(1)| = *$. Soit $\alpha: [0, 1] \rightarrow F$ avec $\alpha(0) = \bar{\xi}(1)$, $\alpha(1) = x_0$.

Soit $\bar{H}: I^2 \rightarrow B$, $\bar{H}(t, t') = \xi(\theta_1(t))$, soit

$\dot{H}: I \times \{0\} \cup \dot{I} \times I \rightarrow X$, $\dot{H}(t, 0) = \bar{\xi}(t)$, $\dot{H}(0, t') = x_0$, $\dot{H}(1, t') = \alpha(t')$.

Comme $(I^2, I \times \{0\} \cup I \times I)$ est isomorphe à la paire $(I^2, I \times \{0\})$, il existe $\bar{H}: I^2 \rightarrow X$ prolongeant $\bar{H}$ et tel que $p \circ \bar{H} = H$; prenant

$$\bar{\xi}: S_1 \rightarrow \hat{X}, \quad \bar{\xi}'(\theta_1(t)) = H(t, 1),$$

on obtient $p \circ \bar{\xi}' = \xi$, d'où $|\xi| = \pi_1(p)(|\bar{\xi}'|)$, $|\bar{\xi}'| \in \pi_1(\hat{X})$.

2) Supposant $|\xi| \in \pi_1(\hat{B})$, $|a|, |b| \in \pi_0(\hat{F})$ avec $\pi_0(1)(|a|) = \pi_0(1)(|b|)$, il existe $\bar{\xi}: [0, 1] \rightarrow X$ tel que

$$p(\bar{\xi}(t)) = \xi(\theta_1(t)), \quad \bar{\xi}(0) = a, \quad \bar{\xi}(1) \sim b \text{ dans } F,$$

ce qui montre que $a \sim b$ dans X , c'est-à-dire

$$\pi_0(1)(|a|) = \pi_0(1)(|b|).$$

Réciproquement, si $|a|, |b| \in \pi_0(\hat{F})$ avec $\pi_0(1)(|a|) = \pi_0(1)(|b|)$, il existe $\bar{\xi}: [0, 1] \rightarrow X$ avec $\bar{\xi}(0) = a$, $\bar{\xi}(1) = b$ et, si $\xi: S_1 \rightarrow \hat{B}$ est défini par $\xi(\theta_1(t)) = p(\bar{\xi}(t))$, on a $|\xi| \in \pi_1(\hat{B})$ et

$$n(|a|, |\xi|) = |b|.$$

7.15 Corollaire. On a $n(*, x) = n(*, y)$ si, et seulement si, $x \cdot y^{-1} = \pi_1(p)(z)$, $z \in \pi_1(\hat{X})$.

Démonstration: Si $n(*, x) = n(*, y)$, on a

$$n(n(*, x), y^{-1}) = n(n(*, y), y^{-1}), \quad n(*, x \cdot y^{-1}) = n(*, y \cdot y^{-1}) = n(*, 1) = *,$$

donc $x \cdot y^{-1} = \pi_1(p)(z)$, $z \in \pi_1(\hat{X})$. Réciproquement, si $x \cdot y^{-1} = \pi_1(p)(z)$ avec $z \in \pi_1(\hat{X})$, on a

$$n(*, x \cdot y^{-1}) = *, \quad n(n(*, x \cdot y^{-1}), y) = n(*, y), \quad n(*, x) = n(*, y).$$

7.16 Corollaire. On a une application pointée

$$\partial: \pi_1(\hat{B}) \rightarrow \pi_0(\hat{F}), \quad x \mapsto n(*, x),$$

qui donne une suite exacte d'ensembles pointés

$$\pi_1(\hat{X}) \xrightarrow{\pi_1(p)} \pi_1(\hat{B}) \xrightarrow{\partial} \pi_0(\hat{F}) \xrightarrow{\pi_0(1)} \pi_0(\hat{X}).$$

7.17 Remarque. Si on a une suite exacte d'ensembles pointés

$$(A, a) \xrightarrow{f} (B, b) \xrightarrow{g} (C, c),$$

et si $(C, c) = 0$, f est surjective; mais il peut arriver que $(A, a) = 0$ sans que g soit injective.

7.18 Définition. Si $(A, a) \xrightarrow{f} (B, b) \xrightarrow{g} (C, c)$ est une suite exacte d'ensembles pointés, on dit qu'elle est *fortement exacte* si $(A, a) \neq 0$ ou si g est injective.

7.19 Corollaire. Si on a une suite exacte

$$(A, a) \xrightarrow{f} (B, b) \xrightarrow{g} (C, c)$$

et si B et C sont munis de structures de groupes d'unités b et c , entre lesquelles g définit un morphisme, alors elle est fortement exacte.

7.20 Corollaire. La suite exacte de 7.16 est fortement exacte.

7.21 Proposition. Etant donné les applications continues pointées $p: (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$, $p': (X', x'_0) \rightarrow (B', b'_0)$, définissant des fibrations dans QT , les fibres $F = p^{-1}(b_0)$, $F' = p'^{-1}(b'_0)$ étant pointées en x_0 et x'_0 , les applications continues pointées

$$f: (X, x_0) \rightarrow (X', x'_0), \quad g: (B, b_0) \rightarrow (B', b'_0)$$

avec $p' \circ f = g \circ p$, alors on a $f(F) \subset F'$ et, si $f': (F, x_0) \rightarrow (F', x'_0)$ est la restriction de f , le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \pi_0(\hat{F}) \times \pi_1(\hat{B}) & \xrightarrow{\eta} & \pi_0(\hat{F}) \\ \downarrow \pi_0(f') \times \pi_1(g) & & \downarrow \pi_0(f') \\ \pi_0(\hat{F}') \times \pi_1(\hat{B}') & \xrightarrow{\eta} & \pi_0(\hat{F}') \end{array} .$$

Démonstration: Si $x \in F$, on a $p(x) = b_0$, donc $p'(f(x)) = g(p(x)) = b'_0$, et $f(x) \in F'$. Si $|\xi| \in \pi_1(\hat{B})$ et $|a| \in \pi_0(\hat{F})$, considérons $\bar{\xi}: [0, 1] \rightarrow X$, avec $p(\bar{\xi}(t)) = \xi(\theta_1(t))$, $\bar{\xi}(0) = a$; $f \circ \bar{\xi}: [0, 1] \rightarrow X'$ vérifie

$$f \circ \bar{\xi}(0) = f(a), \quad p'(f \circ \bar{\xi}(t)) = g(p(\bar{\xi}(t))) = g(\xi(\theta_1(t))),$$

ce qui montre qu'on a

$$\eta(|a|, |\xi|) = |\bar{\xi}(1)|, \quad \eta(|f(a)|, |g \circ \xi|) = |f(\bar{\xi}(1))|,$$

d'où la proposition.

7.22 Définition. On définit $\partial_1: \pi_1(\hat{B}) \rightarrow \pi_0(\hat{F})$ comme étant le composé

$$\pi_1(\hat{B}) \xrightarrow{\partial} \pi_0(\hat{F}) \xrightarrow{\xi_F} \pi_0(\hat{F}).$$

7.23 Proposition. Soit $p: (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ une application continue pointée, définissant une fibration dans $\mathcal{QT}$. Soient $F = p^{-1}(b_0)$ la fibre, pointée en x_0 , et $i: (F, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ l'inclusion. On a alors, pour chaque $n \geq 0$, une suite exacte d'ensembles pointés

$$\pi_n(\hat{F}) \xrightarrow{\pi_n(i)} \pi_n(\hat{X}) \xrightarrow{\pi_n(p)} \pi_n(\hat{B}).$$

Démonstration: Pour $n = 0$, la proposition résulte de 7.12 et de l'équivalence naturelle $\pi_0 \rightarrow \pi_0$ comme foncteurs $\frac{\mathcal{QT}}{\sim} \rightarrow \text{Ens}$. Supposant la proposition valable pour l'entier n , on peut considérer la fibration $E(p): E(X, x_0, x_0) \rightarrow E(B, b_0, b_0)$ (7.7) et on a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \pi_n(\hat{E}(F, x_0, x_0)) & \xrightarrow{\pi_n(E(i))} & \pi_n(\hat{E}(X, x_0, x_0)) & \xrightarrow{\pi_n(E(p))} & \pi_n(\hat{E}(B, b_0, b_0)) \\ \downarrow i_{n+1}^{-1} \circ \gamma_n & & \downarrow i_{n+1}^{-1} \circ \gamma_n & & \downarrow i_{n+1}^{-1} \circ \gamma_n \\ \pi_{n+1}(\hat{F}) & \xrightarrow{\pi_{n+1}(i)} & \pi_{n+1}(\hat{X}) & \xrightarrow{\pi_{n+1}(p)} & \pi_{n+1}(\hat{B}) \end{array}$$

où les colonnes sont bijectives et la première ligne exacte ($E(F, x_0, x_0)$ est la fibre de $E(p)$), ce qui entraîne que la deuxième ligne est aussi exacte.

7.24 Lemme. Dans les conditions de la proposition antérieure, étant donné $n \geq 1$ tel que $\pi_{n-1}(\hat{F}) = 0$, alors $\pi_n(p): \pi_n(\hat{X}) \rightarrow \pi_n(\hat{B})$ est surjective.

Démonstration: Si $n = 1$, le lemme résulte de 7.16 ($\pi_0(\hat{F}) = 0$). Supposant le lemme valable pour l'entier n , on peut l'appliquer à la fibration $E(p): \hat{E}(X, x_0, x_0) \rightarrow \hat{E}(B, b_0, b_0)$, dont la fibre est $\hat{E}(F, x_0, x_0)$; alors, si $\pi_n(\hat{F}) = 0$, on a $\pi_{n-1}(\hat{E}(F, x_0, x_0)) = 0$, ce qui donne un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(\hat{E}(X, x_0, x_0)) & \xrightarrow{\pi_n(E(p))} & \pi_n(\hat{E}(B, b_0, b_0)) \\ \downarrow \pi_{n+1}(\hat{X}) & & \downarrow \pi_{n+1}(\hat{B}) \\ \pi_{n+1}(\hat{X}) & \xrightarrow{\pi_{n+1}(p)} & \pi_{n+1}(\hat{B}) \end{array}$$

où les colonnes sont bijectives et la première ligne surjective; il s'ensuit que la deuxième ligne est surjective.

7.25 Lemme. Soit X un espace quasi-topologique, soit $A \subset X$. On a un homéomorphisme s de A sur un sous-espace de $E(X, A, X)$ défini

par $\alpha \leadsto \hat{\alpha}$ (chemin de valeur constant α) tel que $|s|:A \rightarrow E(X,A,X)$ soit inversible dans $\frac{OT}{\sim}$. Si $x_0 \in A$ et si l'on considère $E(X,A,X)$ pointé en $\hat{x}_0$, alors $|s|:\hat{A} \rightarrow \hat{E}(X,A,X)$ est inversible dans $\frac{OT^*}{\sim}$.

Démonstration: $s:A \rightarrow E(X,A,X)$ est continue; si l'on considère l'application continue $p_0:E(X,A,X) \rightarrow A$, $\xi \leadsto \xi(0)$, on a $p_0 \circ s = 1_A$, ce qui montre, en particulier, que s est un homéomorphisme de A sur $s(A)$. Pour voir que $|s|$ est un inverse de $|p_0|$ dans $\frac{OT}{\sim}$ (ou $\frac{OT^*}{\sim}$), on doit montrer que $s \circ p_0$ est homotope à $1_{E(X,A,X)}$. Or, on a une application continue $H:E(X,A,X) \times I \rightarrow E(X,A,X)$ définie par

$$H(\xi, t)(t') = \begin{cases} \xi(t'), & 0 \leq t' \leq 1-t \\ \xi(1-t), & 1-t \leq t' \leq 1 \end{cases},$$

et on voit que $H(\xi, 0) = \xi$, $H(\xi, 1) = s \circ p_0(\xi)$ et, si $\xi \in s(A)$, $H(\xi, t) = \xi$; ceci montre le lemme.

7.26 Corollaire. Si (X, x_0) est un espace quasi-topologique pointé, alors on a $\pi_i(\hat{X}, \hat{x}_0) = 0$ pour tout $i \geq 1$.

Démonstration: On a $\pi_i(\hat{X}, \hat{x}_0)$ isomorphe à $\pi_{i-1}(\hat{E}(X, x_0, X))$, qui est nul car $\hat{E}(X, x_0, X)$ est isomorphe à $(\{x_0\}, x_0)$ dans $\frac{OT^*}{\sim}$.

7.27 Proposition. Soit $p:(X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ une application continue pointée, définissant une fibration dans OT . Soit

$$E(p):E(X, x_0, F) \rightarrow E(B, b_0, b_0)$$

la fibration associée (7.6). Soit $p_1:E(X, x_0, F) \rightarrow F$, $\xi \leadsto \xi(1)$.

Alors, pour chaque $n \geq 1$,

$$\pi_n(E(p)):\pi_n(\hat{E}(X, x_0, F)) \rightarrow \pi_n(\hat{E}(B, b_0, b_0))$$

est un isomorphisme. Soit, pour $n \geq 2$, $\partial_n:\pi_n(\hat{B}) \rightarrow \pi_{n-1}(\hat{F})$ le composé

$$\pi_n(\hat{B}) \xrightarrow[\gamma_{n-1} \circ 1_n]{-1} \pi_{n-1}(\hat{E}(B, b_0, b_0)) \xrightarrow[\pi_{n-1}(E(p))^{-1}]{-1} \pi_{n-1}(\hat{E}(X, x_0, F)) \xrightarrow[\pi_{n-1}(p_1)]{-1} \pi_{n-1}(\hat{F}).$$

Alors, pour $n \geq 2$, ∂_n est un morphisme de groupes et on a, pour $n \geq 0$, une suite exacte

$$\pi_{n+1}(\hat{X}) \xrightarrow[\pi_{n+1}(r)]{} \pi_{n+1}(\hat{B}) \xrightarrow[\partial_{n+1}]{} \pi_n(\hat{F}) \xrightarrow[\pi_n(i)]{} \pi_n(\hat{X}) \xrightarrow[\pi_n(p)]{} \pi_n(\hat{B}).$$

Démonstration: La fibre de $E(p)$ est $\hat{E}(F, x_0, F)$, lequel, d'après 7.25, est isomorphe dans $\frac{OT^*}{\sim}$ à $(\{x_0\}, x_0)$; donc, pour tout $n \geq 0$, $\pi_n(\hat{E}(F, x_0, F)) = 0$. Ceci entraîne (7.24) que, pour $n \geq 1$,

$$\pi_n(E(p)) : \pi_n(\hat{E}(X, x_0, F)) \rightarrow \pi_n(\hat{E}(B, b_0, b_0))$$

est un morphisme de groupes surjectif et aussi qu'il est injectif (7.23), donc c'est un isomorphisme. Pour $n \geq 2$, ∂_n étant le composé de morphismes de groupes, c'est un morphisme de groupes. Dans le cas $n = 0$, l'exactitude de la suite résulte de 7.16 et 7.23, tenant compte de l'équivalence naturelle $\pi_0 \rightarrow \underline{\pi}_0$. Supposant $n \geq 1$, l'exactitude en $\pi_n(\hat{X})$ est déjà démontrée (7.23); considérant que $p_1: E(X, x_0, F) \rightarrow F$ est une fibration de fibre $E(X, x_0, x_0)$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \pi_n(\hat{E}(X, x_0, x_0)) & \xrightarrow{\pi_n(i)} & \pi_n(\hat{E}(X, x_0, F)) & \xrightarrow{\pi_n(p_1)} & \pi_n(\hat{F}) \\ \downarrow \iota_{n+1}^{-1} \circ \gamma_n & & \downarrow \iota_{n+1}^{-1} \circ \gamma_n \circ \pi_n(E(p)) & & \downarrow \text{id} \\ \pi_{n+1}(\hat{X}) & \xrightarrow{\pi_{n+1}(F)} & \pi_{n+1}(\hat{B}) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & \pi_n(\hat{F}) \end{array}$$

avec les colonnes bijectives et la première ligne exacte, d'où résulte l'exactitude de la seconde. Enfin, on peut considérer la fibration $p_0: \hat{E}(X, X, F) \rightarrow X$ de fibre $\hat{E}(X, x_0, F)$ et l'application $s: F \rightarrow \hat{E}(X, X, F)$ ($x \mapsto \hat{x}$); $p_1: \hat{E}(X, x_0, F) \rightarrow \hat{F}$ se décomposant sous la forme

$$\hat{E}(X, x_0, F) \xrightarrow{i} \hat{E}(X, X, F) \xrightarrow{p'_1} \hat{F},$$

où p'_1 et s définissent des inverses dans $\frac{\pi_n}{\sim}$ (démonstration de 7.25, en changeant le sens des chemins), on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \pi_n(\hat{E}(X, x_0, F)) & \xrightarrow{\pi_n(i)} & \pi_n(\hat{E}(X, X, F)) & \xrightarrow{\pi_n(p_0)} & \pi_n(\hat{X}) \\ \downarrow \iota_{n+1}^{-1} \circ \gamma_n \circ \pi_n(E(p)) & & \downarrow \pi_n(p'_1) & & \downarrow \text{id} \\ \pi_{n+1}(\hat{B}) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & \pi_n(\hat{F}) & \xrightarrow{\pi_n(i)} & \pi_n(\hat{X}) \end{array}$$

(en effet $\pi_n(p'_1) = \pi_n(s)^{-1}$ et $p_0 \circ s = \iota: F \rightarrow X$) dont les colonnes sont des isomorphismes et dont la première ligne est exacte, d'où l'exactitude de la seconde.

7.28 Remarque. Recollant, pour des "nn" successifs, les suites exactes de la proposition antérieure, on obtient une suite exacte

$$\dots \rightarrow \pi_2(\hat{X}) \rightarrow \pi_2(\hat{B}) \rightarrow \pi_1(\hat{F}) \rightarrow \pi_1(\hat{X}) \rightarrow \pi_1(\hat{B}) \rightarrow \pi_0(\hat{F}) \rightarrow \pi_0(\hat{X}) \rightarrow \pi_0(\hat{B})$$

qu'on appelle suite exacte d'homotopie de la fibration $p: (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$.

7.29 Corollaire. La suite exacte d'homotopie est fortement exacte, sauf en $\pi_0(\hat{X})$.

Démonstration: Il suffit de tenir compte de 7.20.

7.30 Proposition. Sous les conditions de la proposition 7.21, on a, pour chaque $n \geq 1$, un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(\hat{B}) & \xrightarrow{\partial_n} & \pi_{n-1}(\hat{F}) \\ \downarrow \pi_n(g) & & \downarrow \pi_{n-1}(f') \\ \pi_n(\hat{B}') & \xrightarrow{\partial_n} & \pi_{n-1}(\hat{F}') \end{array} .$$

Démonstration: Si $n = 1$, la proposition résulte de 7.21 et de l'équivalence naturelle $\pi_0 \rightarrow \pi_0$. Supposant $n \geq 2$, on a des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \hat{E}(X, x_0, F) & \xrightarrow{E(p)} & \hat{E}(B, b_0, b_0) \\ \downarrow E(f) & & \downarrow E(g) \\ \hat{E}(X', x'_0, F') & \xrightarrow{E(p')} & \hat{E}(B', b'_0, b'_0) \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \hat{E}(X, x_0, F) & \xrightarrow{p_1} & \hat{F} \\ \downarrow E(f) & & \downarrow f' \\ \hat{E}(X', x'_0, F') & \xrightarrow{p'_1} & \hat{F}' \end{array}$$

donc aussi

$$\begin{array}{ccc} \pi_{n-1}(\hat{E}(X, x_0, F)) & \xrightarrow{\pi_{n-1}(E(p))} & \pi_{n-1}(\hat{E}(B, b_0, b_0)) \\ \downarrow \pi_{n-1}(E(f)) & & \downarrow \pi_{n-1}(E(g)) \\ \pi_{n-1}(\hat{E}(X', x'_0, F')) & \xrightarrow{\pi_{n-1}(E(p'))} & \pi_{n-1}(\hat{E}(B', b'_0, b'_0)) \end{array},$$

$$\begin{array}{ccc} \pi_{n-1}(\hat{E}(X, x_0, F)) & \xrightarrow{\pi_{n-1}(p_1)} & \pi_{n-1}(\hat{F}) \\ \downarrow \pi_{n-1}(E(f)) & & \downarrow \pi_{n-1}(f') \\ \pi_{n-1}(\hat{E}(X', x'_0, F')) & \xrightarrow{\pi_{n-1}(p'_1)} & \pi_{n-1}(\hat{F}') \end{array}$$

et la proposition en découle, si l'on tient compte de la définition de ∂_n et de la naturalité de γ_{n-1} et ι_n .

7.31 Proposition. Soit $p: (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ une application continue pointée, définissant une fibration dans QT . Soit $b_0 \in B' \subset B$, soit $X' = p^{-1}(B')$. Alors, pour chaque $n \geq 1$,

$$\pi_n(p): \pi_n(\hat{X}, \hat{x}') \rightarrow \pi_n(\hat{B}, \hat{b}')$$

est bijectif.

Démonstration: On sait, d'après 7.6, qu'on a une fibration

$$E(p): \hat{E}(X, x_0, X') \rightarrow \hat{E}(B, b_0, B')$$

et la fibre de cette fibration est $\hat{E}(F, x_0, F)$ qui, vu 7.25, est isomorphe à $(\{x_0\}, x_0)$ dans $\frac{\partial T_*}{\sim}$. Comme, pour chaque $n \geq 1$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(\hat{X}, \hat{X}') & \xrightarrow{\pi_n(p)} & \pi_n(\hat{B}, \hat{B}') \\ \uparrow \gamma_{n-1} & & \uparrow \gamma_{n-1} \\ \pi_{n-1}(\hat{E}(X, x_0, X')) & \xrightarrow{\pi_{n-1}(E(p))} & \pi_{n-1}(\hat{E}(B, b_0, B')) \end{array}$$

avec les γ_{n-1} bijectifs, tout revient à démontrer que, pour chaque $n \geq 0$, $\pi_n(E(p))$ est bijectif.

Pour $n \geq 1$, ceci résulte du fait qu'on a une suite fortement exacte

$$\pi_n(\hat{E}(F, x_0, F)) \rightarrow \pi_n(\hat{E}(X, x_0, X')) \rightarrow \pi_n(\hat{E}(B, b_0, B')) \rightarrow \pi_{n-1}(\hat{E}(F, x_0, F)),$$

où $\pi_n(\hat{E}(F, x_0, F)) = 0 = \pi_{n-1}(\hat{E}(F, x_0, F))$.

Pour $n = 0$, on doit voir que $\pi_0(\hat{E}(X, x_0, X')) \rightarrow \pi_0(\hat{E}(B, b_0, B'))$ est bijectif, ou encore que $\pi_0(\hat{E}(X, x_0, X')) \rightarrow \pi_0(\hat{E}(B, b_0, B'))$ est bijectif. Or, $E(p): E(X, x_0, X') \rightarrow E(B, b_0, B')$ étant surjectif (conséquence du fait que p est une fibration), $\pi_0(E(p))$ est aussi surjectif. Enfin, étant donné $\bar{\xi}, \bar{\xi}' \in E(X, x_0, X')$ tels que

$$\pi_0(E(p))(|\bar{\xi}|) = \pi_0(E(p))(|\bar{\xi}'|),$$

donc $E(p) \circ \bar{\xi} \sim E(p) \circ \bar{\xi}'$ dans $E(B, b_0, B')$, il existe $H: I^2 \rightarrow B$ avec $H(t, 0) = b_0$, $H(t, 1) \in B'$, $H(0, t') = p(\bar{\xi}(t'))$, $H(1, t') = p(\bar{\xi}'(t'))$ et, si l'on définit $\hat{H}: I \times \{0\} \cup I \times I \rightarrow X$ par

$$\hat{H}(t, 0) = x_0, \quad \hat{H}(0, t') = \bar{\xi}(t'), \quad \hat{H}(1, t') = \bar{\xi}'(t'),$$

on a $p \circ \hat{H} = H$; donc, puisque p est une fibration et que la paire $(I^2, I \times \{0\} \cup I \times I)$ est isomorphe à $(I^2, I \times \{0\})$, il existe $\bar{H}: I^2 \rightarrow X$ prolongeant $\hat{H}$ et tel que $p \circ \bar{H} = H$, ce qui entraîne $\bar{H}(t, 1) \in X'$. On voit donc que $\bar{\xi} \sim \bar{\xi}'$ dans $E(X, x_0, X')$, donc $\pi_0(E(p))$ est injective.

7.32 Définition. Si (X, A, x_0) est une paire quasi-topologique pointée, on définit, pour chaque $n \geq 1$,

$$\Delta_n: \pi_n(\hat{X}, \hat{A}) \rightarrow \pi_{n-1}(\hat{A})$$

comme étant le composé

$$\pi_n(\hat{X}, \hat{A}) \xrightarrow[\gamma_{n-1}]{-1} \pi_{n-1}(\hat{E}(X, x_0, A)) \xrightarrow[\pi_{n-1}(p_1)]{} \pi_{n-1}(\hat{A}) ,$$

où $p_1: \hat{E}(X, x_0, A) \rightarrow \hat{A}$, $\xi \mapsto \xi(1)$.

7.33 Corollaire. Si $n \geq 2$, $\Delta_n: \pi_n(\hat{X}, \hat{A}) \rightarrow \pi_{n-1}(\hat{A})$ est un morphisme de groupes.

7.34 Corollaire. Si (X, A, x_0) et (X', A', x'_0) sont des paires quasi-topologiques pointées et si $f: (\hat{X}, \hat{A}) \rightarrow (\hat{X}', \hat{A}')$ est un morphisme de $\mathcal{QT}_*^2$, alors, si $f': \hat{A} \rightarrow \hat{A}'$ est le morphisme de $\mathcal{QT}_*$ restriction de f , on a, pour chaque $n \geq 1$, un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(\hat{X}, \hat{A}) & \xrightarrow{\Delta_n} & \pi_{n-1}(\hat{A}) \\ \downarrow \pi_n(f) & & \downarrow \pi_{n-1}(f') \\ \pi_n(\hat{X}', \hat{A}') & \xrightarrow{\Delta_n} & \pi_{n-1}(\hat{A}') \end{array}$$

7.35 Proposition. $\Delta_n: \pi_n(\hat{X}, \hat{A}) \rightarrow \pi_{n-1}(\hat{A})$ associe $|\varepsilon/S_{n-1}|$ à $|g|$, où $g: (CS_{n-1}, S_{n-1}) \rightarrow (\hat{X}, \hat{A})$ et $\varepsilon/S_{n-1}: S_{n-1} \rightarrow \hat{A}$.

Démonstration: Si $|g| \in \pi_n(\hat{X}, \hat{A})$, $g: (CS_{n-1}, S_{n-1}) \rightarrow (\hat{X}, \hat{A})$, on a

$$\gamma_{n-1}^{-1}(|g|) = |\check{g}| \in \pi_{n-1}(\hat{E}(X, x_0, A)) ,$$

où

$$\check{g}: S_{n-1} \rightarrow \hat{E}(X, x_0, A) , \quad \check{g}(x)(t) = g(tx) ,$$

et alors $\pi_{n-1}(p_1)(|\check{g}|) = |p_1 \circ \check{g}|$, où $p_1 \circ \check{g}: S_{n-1} \rightarrow \hat{A}$ est défini par $x \mapsto \check{g}(x)(1) = g(1x)$, donc $p_1 \circ \check{g} = \varepsilon/S_{n-1}$.

7.36 Proposition. Soit (X, A, x_0) une paire quasi-topologique pointée. On a, pour chaque $n \geq 0$, une suite exacte

$$\pi_{n+1}(\hat{A}) \xrightarrow[\pi_{n+1}(i)]{} \pi_{n+1}(\hat{X}) \xrightarrow[\pi_{n+1}(i') \circ i_{n+1}]{} \pi_{n+1}(\hat{X}, \hat{A}) \xrightarrow[\Delta_{n+1}]{} \pi_n(\hat{A}) \xrightarrow[\pi_n(i)]{} \pi_n(\hat{X}) ,$$

où $i: \hat{A} \rightarrow \hat{X}$ et $i': (\hat{X}, \{x_0\}) \rightarrow (\hat{X}, \hat{A})$ sont les inclusions.

Démonstration: On a une fibration $p_0: E(X, X, A) \rightarrow X$, dont la fibre est $\hat{E}(X, x_0, A)$. On a aussi un diagramme commutatif dans $\frac{\mathcal{QT}_*}{\sim}$

$$\begin{array}{ccccc} \hat{E}(X, x_0, A) & \xrightarrow{i} & \hat{E}(X, X, A) & \xrightarrow{p_0} & \hat{X} \\ \downarrow \text{"} & & \downarrow p'_1 & & \downarrow \text{"} \\ \hat{E}(X, x_0, A) & \xrightarrow[p_1]{} & \hat{A} & \xrightarrow{i} & \hat{X} \end{array}$$

(l'inverse de $|p'_1|$ étant $|\xi|: \hat{A} \rightarrow \hat{E}(X, X, A)$ d'après 7.25 , avec le sens des chemins opposé). On a un diagramme commutatif (voir 7.27)

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \pi_{n+1}(\hat{E}(X, X, A)) & \xrightarrow{\pi_{n+1}(p_0)} & \pi_{n+1}(\hat{X}) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & \pi_n(\hat{E}(X, x_0, A)) & \xrightarrow{\pi_n(i)} & \pi_n(\hat{E}(X, X, A)) & \xrightarrow{\pi_n(p_0)} & \pi_n(\hat{X}) \\
 \downarrow \pi_{n+1}(p'_1) & & \parallel \downarrow & & \parallel \downarrow & & \downarrow \pi_n(p'_1) & & \parallel \downarrow \\
 \pi_{n+1}(\hat{A}) & \xrightarrow{\pi_{n+1}(i)} & \pi_{n+1}(\hat{X}) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & \pi_n(\hat{E}(X, x_0, A)) & \xrightarrow{\pi_n(p_1)} & \pi_n(\hat{A}) & \xrightarrow{\pi_n(i)} & \pi_n(\hat{X})
 \end{array}$$

où les colonnes sont bijectives et la première ligne exacte, donc la seconde est aussi exacte. Calculons ∂_{n+1} :

Si $n=0$, étant donné $\xi: S_1 \rightarrow \hat{X}$, on peut considérer

$$\bar{\xi}: [0, 1] \rightarrow E(X, X, A) , \quad \bar{\xi}(t)(t') = \xi(\theta_1(t(1-t'))),$$

et on a alors $\bar{\xi}(0) = \hat{x}_0$, $p_0(\bar{\xi}(t)) = \xi(\theta_1(t))$,

$$\bar{\xi}(1)(t') = \xi(\theta_1(1-t')) = \xi'(\theta_1(t')) ,$$

où $|\xi'|$ est l'inverse de $|\xi|$ dans $\pi_1(\hat{X})$; d'où résulte que ∂_1 est le composé

$$\pi_1(\hat{X}) \xrightarrow{\mu_1} \pi_1(\hat{X}) \xrightarrow[\gamma_0 \circ i_1]{-1} \pi_0(\hat{E}(X, x_0, x_0)) \xrightarrow[\pi_0(E(i'))]{-1} \pi_0(\hat{E}(X, x_0, A)) ,$$

en représentant par $\mu_n: \pi_n(\hat{X}) \rightarrow \pi_n(\hat{X})$ ($n \geq 1$) l'inversion du groupe.

Si $n \geq 1$, on sait que, étant donné

$$E(p_0): \hat{E}(E(X, X, A), \hat{x}_0, E(X, x_0, A)) \rightarrow \hat{E}(X, x_0, x_0) ,$$

$$\bar{p}_1: \hat{E}(E(X, X, A), \hat{x}_0, E(X, x_0, A)) \rightarrow \hat{E}(X, x_0, A) ,$$

$\partial_{n+1}: \pi_{n+1}(\hat{X}) \rightarrow \pi_n(\hat{E}(X, x_0, A))$ est le composé

$$\begin{aligned}
 \pi_{n+1}(\hat{X}) & \xrightarrow[\gamma_n \circ i_{n+1}]{-1} \pi_n(\hat{E}(X, x_0, x_0)) \xrightarrow[\pi_n(E(p_0))]{-1} \\
 & \rightarrow \pi_n(\hat{E}(E(X, X, A), \hat{x}_0, E(X, x_0, A))) \xrightarrow[\pi_n(\bar{p}_1)]{\quad} \pi_n(\hat{E}(X, x_0, A)) .
 \end{aligned}$$

Or on a une application continue pointée

$$\lambda: \hat{E}(X, x_0, x_0) \rightarrow \hat{E}(E(X, X, A), \hat{x}_0, E(X, x_0, A)) , \quad \lambda(\xi)(t)(t') = \xi(t(1-t')) ;$$

on a $E(p_0) \circ \lambda = 1_{\hat{E}(X, x_0, x_0)}$, donc $\pi_n(E(p_0))^{-1} = \pi_n(\lambda)$, et

$$\bar{p}_1 \circ \lambda: \hat{E}(X, x_0, x_0) \rightarrow \hat{E}(X, x_0, A)$$

est défini par $\xi \mapsto \bar{\xi}$, $\bar{\xi}(t') = \xi(1-t')$.

Etant donné $|\alpha| \in \pi_{n+1}(\hat{X})$, $\alpha: S_{n+1} \rightarrow \hat{X}$, on a $\gamma_n^{-1} \circ \iota_{n+1}(|\alpha|) = |\beta|$,
 $\beta: S_n \rightarrow \hat{E}(X, x_0, x_0)$, $\beta(\theta_n(t_1, \dots, t_n))(t) = \alpha(\theta_{n+1}(t, t_1, \dots, t_n))$,

donc

$$\begin{aligned} \partial_{n+1}(|\alpha|) &= \pi_n(\bar{p}_1 \circ \lambda)(|\beta|) = |\gamma|, \quad \gamma: S_n \rightarrow \hat{E}(X, x_0, A), \\ \gamma(\theta_n(t_1, \dots, t_n))(t) &= \beta(\theta_n(t_1, \dots, t_n))(1-t) = \\ &= \alpha(\theta_{n+1}(1-t, t_1, \dots, t_n)) = \alpha'(\theta_{n+1}(t, t_1, \dots, t_n)), \end{aligned}$$

où $|\alpha'| = |\alpha|^{-1}$ dans $\pi_{n+1}(\hat{X})$. On voit donc que ∂_{n+1} est le composé

$$\pi_{n+1}(\hat{X}) \xrightarrow{\mu_{n+1}} \pi_{n+1}(\hat{X}) \xrightarrow{\gamma_n^{-1} \circ \iota_{n+1}} \pi_n(\hat{E}(X, x_0, x_0)) \xrightarrow{\pi_n(E(i'))} \pi_n(\hat{E}(X, x_0, A)).$$

On a donc, pour $n \geq 0$, un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_{n+1}(\hat{A}) & \xrightarrow{\pi_{n+1}(i)} & \pi_{n+1}(\hat{X}) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & \pi_n(\hat{E}(X, x_0, A)) & \xrightarrow{\pi_n(p_1)} & \pi_n(\hat{A}) \xrightarrow{\pi_n(i)} \pi_n(\hat{X}) \\ \parallel \downarrow & & \parallel \downarrow & & \downarrow \gamma_n & & \parallel \downarrow \quad \downarrow \parallel \\ \pi_{n+1}(\hat{A}) & \xrightarrow{\pi_{n+1}(i)} & \pi_{n+1}(\hat{X}) & \xrightarrow{\pi_{n+1}(i') \circ \iota_{n+1} \circ \mu_{n+1}} & \pi_{n+1}(\hat{X}, \hat{A}) & \xrightarrow{\Delta_{n+1}} & \pi_n(\hat{A}) \xrightarrow{\pi_n(i)} \pi_n(\hat{X}) \end{array}$$

où les colonnes sont bijectives et la première ligne exacte; donc la deuxième ligne est exacte, et ceci entraîne la validité de l'énoncé

(μ_{n+1} étant bijective, l'image de $\pi_{n+1}(i') \circ \iota_{n+1} \circ \mu_{n+1}$ est l'image de $\pi_{n+1}(i') \circ \iota_{n+1}$, et le noyau de $\pi_{n+1}(i') \circ \iota_{n+1}$ est $\mu_{n+1}(N)$, où N est le noyau de $\pi_{n+1}(i') \circ \iota_{n+1} \circ \mu_{n+1}$, c'est-à-dire l'image de $\pi_{n+1}(i)$; ainsi N est un sous-groupe de $\pi_{n+1}(\hat{X})$, et $\mu_{n+1}(N) = N$).

7.37 Corollaire. Les suites exactes de la proposition antérieure sont fortement exactes, sauf, dans le cas $n = 0$, en $\pi_0(\hat{A})$.

7.38 Remarque. En recollant pour les différents "nn" les suites exactes de la proposition antérieure, on obtient une suite exacte

$$\dots \pi_2(\hat{A}) \rightarrow \pi_2(\hat{X}) \rightarrow \pi_2(\hat{X}, \hat{A}) \rightarrow \pi_1(\hat{A}) \rightarrow \pi_1(\hat{X}) \rightarrow \pi_1(\hat{X}, \hat{A}) \rightarrow \pi_0(\hat{A}) \rightarrow \pi_0(\hat{X})$$

(qui est fortement exacte sauf en $\pi_0(\hat{A})$) qu'on appelle *suite exacte d'homotopie de la paire pointée* (X, A, x_0) .

On va maintenant établir la suite exacte d'homotopie d'un triplet,

à l'aide du procédé employé dans {16} .

Etant donné l'espace quasi-topologique X et $x_0 \in B \subset A \subset X$, soient les inclusions $i: (\hat{A}, \hat{B}) \rightarrow (\hat{X}, \hat{B})$, $j: (\hat{X}, \hat{B}) \rightarrow (\hat{X}, \hat{A})$ (dans $\mathcal{QT}_*2$) ; soit, pour $n \geq 2$, $\hat{\Delta}_n: \pi_n(\hat{X}, \hat{A}) \rightarrow \pi_{n-1}(\hat{A}, \hat{B})$ le composé

$$\pi_n(\hat{X}, \hat{A}) \xrightarrow{\Delta_n} \pi_{n-1}(\hat{A}) \xrightarrow{i_{n-1}} \pi_{n-1}(\hat{A}, \{x_0\}) \xrightarrow{\pi_{n-1}(k)} \pi_{n-1}(\hat{A}, \hat{B}),$$

où $k: (\hat{A}, \{x_0\}) \rightarrow (\hat{A}, \hat{B})$ est l'inclusion (pour $n \geq 3$, $\hat{\Delta}_n$ est un morphisme de groupes).

7.39 Proposition. Pour chaque $n \geq 1$, on a une suite exacte

$$\pi_{n+1}(\hat{X}, \hat{B}) \xrightarrow{\pi_{n+1}(j)} \pi_{n+1}(\hat{X}, \hat{A}) \xrightarrow{\hat{\Delta}_{n+1}} \pi_n(\hat{A}, \hat{B}) \xrightarrow{\pi_n(i)} \pi_n(\hat{X}, \hat{B}) \xrightarrow{\pi_n(j)} \pi_n(\hat{X}, \hat{A}).$$

Démonstration: Considérons la fibration $p_1: X' \rightarrow X$, $X' = E(X, x_0, X)$; soit

$$A' = p_1^{-1}(A) = E(X, x_0, A), \quad B' = p_1^{-1}(B) = E(X, x_0, B);$$

on a aussi une fibration $p_1/: A' \rightarrow A$, et donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} \pi_{n+1}(\hat{X}', \hat{B}') & \xrightarrow{\pi_{n+1}(j')} & \pi_{n+1}(\hat{X}', \hat{A}') & \xrightarrow{\hat{\Delta}_{n+1}} & \pi_n(\hat{A}', \hat{B}') & \xrightarrow{\pi_n(i')} & \pi_n(\hat{X}', \hat{B}') & \xrightarrow{\pi_n(j')} & \pi_n(\hat{X}', \hat{A}') \\ \downarrow \pi_{n+1}(p_1) & & \downarrow \pi_{n+1}(p_1) & & \downarrow \pi_n(p_1/) & & \downarrow \pi_n(p_1) & & \downarrow \pi_n(p_1) \\ \pi_{n+1}(\hat{X}, \hat{B}) & \xrightarrow{\pi_{n+1}(j)} & \pi_{n+1}(\hat{X}, \hat{A}) & \xrightarrow{\hat{\Delta}_{n+1}} & \pi_n(\hat{A}, \hat{B}) & \xrightarrow{\pi_n(i)} & \pi_n(\hat{X}, \hat{B}) & \xrightarrow{\pi_n(j)} & \pi_n(\hat{X}, \hat{A}) \end{array}$$

où les colonnes sont bijectives (7.31) ; par suite il suffit de démontrer que la première ligne est exacte.

Mais on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} \pi_{n+1}(\hat{X}', \hat{B}') & \xrightarrow{\pi_{n+1}(j')} & \pi_{n+1}(\hat{X}', \hat{A}') & \xrightarrow{\hat{\Delta}_{n+1}} & \pi_n(\hat{A}', \hat{B}') & \xrightarrow{\pi_n(i')} & \pi_n(\hat{X}', \hat{B}') & \xrightarrow{\pi_n(j')} & \pi_n(\hat{X}', \hat{A}') \\ \downarrow \Delta_{n+1} & & \downarrow \Delta_{n+1} & & \parallel \downarrow & & \downarrow \Delta_n & & \downarrow \Delta_n \\ \pi_n(\hat{B}') & \xrightarrow{\pi_n(i)} & \pi_n(\hat{A}') & \xrightarrow{\pi_n(k) \circ i_n} & \pi_n(\hat{A}', \hat{B}') & \xrightarrow{\Delta_n} & \pi_{n-1}(\hat{B}') & \xrightarrow{\pi_{n-1}(i)} & \pi_{n-1}(\hat{A}') \end{array}$$

où les colonnes sont bijectives ($\hat{X}'$ étant isomorphe dans $\frac{\mathcal{QT}_*}{\sim}$ à $(\{x_0\}, x_0)$, d'après 7.25, on aura $\pi_1(\hat{X}') = 0$, et on considère les suites d'homotopie des paires $(\hat{X}', \hat{B}')$ et $(\hat{X}', \hat{A}')$ en tenant compte du fait qu'elles sont fortement exactes en $\pi_n(\hat{X}', \hat{B}')$ et $\pi_n(\hat{X}', \hat{A}')$) et la ligne inférieure est exacte (7.36) ; donc la ligne supérieure

est aussi exacte.

7.40 Corollaire. La suite exacte de la proposition antérieure est même fortement exacte, sauf pour $n = 1$ en $\pi_1(\hat{X}, \hat{B})$.

7.41 Remarque. Recollant pour les différents "nn" les suites exactes antérieures, on obtient une suite exacte

$$\dots \pi_3(\hat{X}, \hat{A}) \rightarrow \pi_2(\hat{A}, \hat{B}) \rightarrow \pi_2(\hat{X}, \hat{B}) \rightarrow \pi_2(\hat{X}, \hat{A}) \rightarrow \pi_1(\hat{A}, \hat{B}) \rightarrow \pi_1(\hat{X}, \hat{B}) \rightarrow \pi_1(\hat{X}, \hat{A}) \dots$$

Si (X, A, x_0) est une paire quasi-topologique pointée, on a déjà vu que, pour $n \geq 1$, $\pi_n(\hat{X}, \hat{A})$ est isomorphe à $\pi_{n-1}(\hat{E}(X, x_0, A))$ (par γ_n). Dans le cas $n \geq 2$, on va établir que $\pi_n(\hat{X}, \hat{A})$ est isomorphe à $\pi_{n-1}(\hat{E}(X, A, A), \hat{E}(A, A, A))$, résultat qui nous intéressera plus tard.

Etant donné la catégorie QT_{*3} des triplets quasi-topologiques pointés (page 91), si on fixe $(\hat{A}, \hat{A}_1, \hat{A}_2) = (A, A_1, A_2, a_0)$, on a un foncteur $F: QT_{*3}^* \rightarrow QT_*$ associant, à $(\hat{X}, \hat{X}_1, \hat{X}_2)$, $(\hat{A}, \hat{A}_1, \hat{A}_2) \cdot QT_{*3} \cdot (\hat{X}, \hat{X}_1, \hat{X}_2)$, pointé en $\hat{x}_0$ et avec la quasi-topologie de la convergence locale, et, à $f: (\hat{X}, \hat{X}_1, \hat{X}_2) \rightarrow (\hat{Y}, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2)$, l'application continue pointée

$$(\hat{A}, \hat{A}_1, \hat{A}_2) \cdot QT_{*3} \cdot (\hat{Y}, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2) \rightarrow (\hat{A}, \hat{A}_1, \hat{A}_2) \cdot QT_{*3} \cdot (\hat{X}, \hat{X}_1, \hat{X}_2), \quad g \mapsto g \circ f.$$

7.42 Lemme. Le foncteur F passe au quotient, donnant un foncteur

$$\underline{F}: \frac{QT_{*3}^*}{\sim} \rightarrow \frac{QT_*}{\sim}.$$

Démonstration: Il suffit de voir que l'application $f \mapsto (g \mapsto g \circ f)$ de $(\hat{Y}, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2) \cdot QT_{*3} \cdot (\hat{X}, \hat{X}_1, \hat{X}_2)$ vers

$$[(\hat{A}, \hat{A}_1, \hat{A}_2) \cdot QT_{*3} \cdot (\hat{X}, \hat{X}_1, \hat{X}_2)] \cdot QT_* \cdot [(\hat{A}, \hat{A}_1, \hat{A}_2) \cdot QT_{*3} \cdot (\hat{Y}, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2)]$$

est continue, ou encore que l'application $(f, g) \mapsto g \circ f$, de

$$[(\hat{Y}, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2) \cdot QT_{*3} \cdot (\hat{X}, \hat{X}_1, \hat{X}_2)] \times [(\hat{A}, \hat{A}_1, \hat{A}_2) \cdot QT_{*3} \cdot (\hat{Y}, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2)]$$

vers $(\hat{A}, \hat{A}_1, \hat{A}_2) \cdot QT_{*3} \cdot (\hat{X}, \hat{X}_1, \hat{X}_2)$, est continue, ce qui est vrai.

7.43 Proposition. Soit (X, A, x_0) une paire quasi-topologique pointée, soit

$$i: (\hat{E}(X, x_0, A), \{\hat{x}_0\}) \rightarrow (\hat{E}(X, A, A), \hat{E}(A, A, A))$$

l'inclusion. Alors, pour chaque $n \geq 1$,

$$\pi_n(i): \pi_n(\hat{E}(X, x_0, A), \{\hat{x}_0\}) \rightarrow \pi_n(\hat{E}(X, A, A), \hat{E}(A, A, A))$$

est bijectif.

Démonstration: Considérant l'application continue pointée

$$E(1): \hat{E}(E(X, x_0, A), \{\hat{x}_0\}, \{\hat{x}_0\}) \rightarrow \hat{E}(E(X, A, A), \{\hat{x}_0\}, E(A, A, A))$$

(c'est l'inclusion), il nous suffit, en tenant compte des bijections γ_n , de voir que $\pi_{n-1}(E(1))$ est bijectif. On va même montrer que $[E(1)]$ est inversible dans $\frac{\Omega T_*}{\sim}$, ce qui prouvera la proposition.

Or, il existe un homéomorphisme de $E(E(X, A, A), \hat{x}_0, E(A, A, A))$ sur

$$(X, A, \{x_0\}, x_0) \cdot \Omega T_{*3} \cdot (I^2, \dot{I}^2, \{0\} \times I, (0, 0))$$

qui associe, à $\xi: [0, 1] \rightarrow E(X, A, A)$,

$$\hat{\xi}: I^2 \rightarrow X, \quad \hat{\xi}(t, t') = \xi(t)(t'),$$

cet homéomorphisme appliquant $\hat{x}_0$ sur $\hat{x}_0$ et $E(E(X, x_0, A), \hat{x}_0, \hat{x}_0)$ sur

$$(X, A, \{x_0\}, x_0) \cdot \Omega T_{*3} \cdot (I^2, \dot{I}^2, I \times \{0\} \cup I \times I, (0, 0)).$$

Il nous suffit donc de montrer que la classe de l'inclusion

$$(X, A, \{x_0\}, x_0) \cdot \Omega T_{*3} \cdot (I^2, \dot{I}^2, I \times \{0\} \cup I \times I, (0, 0)) \rightarrow (X, A, \{x_0\}, x_0) \cdot \Omega T_{*3} \cdot (I^2, \dot{I}^2, \{0\} \times I, (0, 0))$$

est inversible dans $\frac{\Omega T_*}{\sim}$, et ceci résulte du lemme antérieur et du lemme 6.8.

8. Homologie singulière cubique des espaces quasi-topologiques

Dans ce paragraphe, on va présenter la théorie de l'homologie cubique dans les espaces quasi-topologiques. Serre, dans sa thèse ({21}), en a donné la définition et quelques propriétés, mais s'est référé au travail de Eilenberg et Mac Lane ({22}), où est démontrée l'équivalence de cette théorie avec la théorie de l'homologie singulière classique, pour le reste de la théorie. Ici on préfère ne pas être tributaire de la théorie classique et développer donc la théorie cubique indépendamment. Bien que, algébriquement, elle nécessite quelques "passages au quotient" supplémentaires, la théorie cubique est d'un traitement géométrique beaucoup plus facile (voir, par exemple, la construction des opérateurs "prismatique" et "division barycentrique") et elle est essentielle dans la démonstration qu'on présentera du théorème de Hurewicz.

Si X est un espace quasi-topologique, on appelle n -cube singu-

lier dans X ($n \geq 0$) une application continue $S: I^n \rightarrow X$ (un 0-cube s'identifie donc à un point de X). Le n -cube est dit *i-dégénéré* s'il ne dépend pas de sa i -ème variable (c'est-à-dire

$$S(t_1, \dots, t_i, \dots, t_n) = S(t_1, \dots, t'_i, \dots, t_n) \text{).}$$

Le n -cube est dit *dégénéré* s'il est i -dégénéré pour un certain i . Un 0-cube n'est pas dégénéré, un 1-cube l'est si, et seulement si, il est constant.

On désigne, pour chaque entier n , par $Q_n(X)$ un module libre ayant pour base la classe des n -cubes singuliers (donc $Q_n(X) = 0$ si $n < 0$), et par $D_n(X)$ le sous-module engendré par les cubes dégénérés. Si ϵ est dans $[0, 1]$ (le plus souvent $\epsilon = 0$ ou $\epsilon = 1$) et $1 \leq j \leq n$, on représente par $\lambda_j^\epsilon: [0, 1]^{n-1} \rightarrow [0, 1]^n$ ($n \geq 1$) l'application

$$(t_1, \dots, t_{n-1}) \mapsto (t_1, \dots, t_{i-1}, \epsilon, t_{i+1}, \dots, t_{n-1}) \text{ .}$$

On voit facilement que, si $1 \leq i < j \leq n$, alors

$$\lambda_j^{\epsilon'} \circ \lambda_i^\epsilon = \lambda_i^\epsilon \circ \lambda_{j-1}^{\epsilon'}: I^{n-2} \rightarrow I^n \text{ .}$$

Si $n \geq 1$, on définit un morphisme $d_n: Q_n(X) \rightarrow Q_{n-1}(X)$, à savoir celui qui applique $S: I^n \rightarrow X$ sur

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i (S \circ \lambda_i^0 - S \circ \lambda_i^1) \text{ ;}$$

si $n \leq 0$, $d_n: Q_n(X) \rightarrow Q_{n-1}(X)$ est le morphisme nul. On omet souvent l'indice n .

8.1 Proposition. Les $Q_n(X)$ avec les morphismes d_n constituent un module gradué différentiel $Q(X)$.

Démonstration: Si $S: I^n \rightarrow X$, $n \geq 2$, on a

$$dS = \sum_{i=1}^n (-1)^i (S \circ \lambda_i^0 - S \circ \lambda_i^1) \text{ ,}$$

donc

$$\begin{aligned} ddS &= \sum_{i=1}^n (-1)^i (d(S \circ \lambda_i^0) - d(S \circ \lambda_i^1)) = \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^i \left(\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j (S \circ \lambda_i^0 \circ \lambda_j^0 - S \circ \lambda_i^0 \circ \lambda_j^1) - \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j (S \circ \lambda_i^1 \circ \lambda_j^0 - S \circ \lambda_i^1 \circ \lambda_j^1) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{i+j} S \circ \lambda_i^0 \circ \lambda_j^0 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{i+j} S \circ \lambda_i^0 \circ \lambda_j^1 - \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{i+j} S \circ \lambda_i^1 \circ \lambda_j^0 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{i+j} S \circ \lambda_i^1 \circ \lambda_j^1 = \\ &= \left[\sum_{1 \leq i < j \leq n-1} (-1)^{i+j} S \circ \lambda_i^0 \circ \lambda_j^0 + \sum_{1 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} S \circ \lambda_i^0 \circ \lambda_j^0 \right] - \\ &\quad - \left[\sum_{1 \leq i < j \leq n-1} (-1)^{i+j} S \circ \lambda_i^0 \circ \lambda_j^1 + \sum_{1 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} S \circ \lambda_i^0 \circ \lambda_j^1 \right] - \\ &\quad - \left[\sum_{1 \leq i < j \leq n-1} (-1)^{i+j} S \circ \lambda_i^1 \circ \lambda_j^0 + \sum_{1 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} S \circ \lambda_i^1 \circ \lambda_j^0 \right] + \\ &\quad + \left[\sum_{1 \leq i < j \leq n-1} (-1)^{i+j} S \circ \lambda_i^1 \circ \lambda_j^1 + \sum_{1 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} S \circ \lambda_i^1 \circ \lambda_j^1 \right] = 0 \end{aligned}$$

$$-\left[\sum_{1 \leq i < j \leq n-1} (-1)^{i+j} \text{Sol}_{\lambda_i^1 \circ \lambda_j^0} + \sum_{1 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} \text{Sol}_{\lambda_i^0 \circ \lambda_j^1} \right] + \\ + \left[\sum_{1 \leq i < j \leq n-1} (-1)^{i+j} \text{Sol}_{\lambda_i^1 \circ \lambda_j^1} + \sum_{1 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} \text{Sol}_{\lambda_i^1 \circ \lambda_j^1} \right] = 0$$

(en tenant compte de l'égalité $\lambda_i^{\varepsilon'} \circ \lambda_j^{\varepsilon} = \lambda_j^{\varepsilon} \circ \lambda_{i-1}^{\varepsilon'}$, $j < i$).

En prenant tout de suite l'homologie de ce module gradué différentiel, on obtiendrait une théorie de l'homologie des espaces quasi-topologiques, qui ne serait cependant pas bonne, l'homologie d'un espace réduit à un point n'étant pas nulle dans les dimensions positives. C'est pour cette raison qu'on est obligé de prendre le quotient par les $D_n(X)$.

8.2 Proposition. Les $D_n(X)$ constituent un sous-module gradué différentiel $D(X)$ de $Q(X)$.

Démonstration: Si $S: I^n \rightarrow X$ est i -dégénéré, alors, pour $j \neq i$, $\text{Sol}_{\lambda_j^{\varepsilon}}$ est dégénéré, et $\text{Sol}_{\lambda_i^0} = \text{Sol}_{\lambda_i^1}$, d'où résulte que $dS \in D_{n-1}(X)$.

8.3 Définition. On définit le module gradué différentiel $C(X)$ comme étant le quotient $\frac{Q(X)}{D(X)}$.

Si $f: X \rightarrow Y$ est une application continue, on peut considérer les morphismes $Q_n(f): Q_n(X) \rightarrow Q_n(Y)$ qui appliquent S sur $f \circ S$. La famille $Q(f)$ des $Q_n(f)$ définit un morphisme gradué différentiel de $Q(X)$ dans $Q(Y)$, lequel applique $D(X)$ dans $D(Y)$.

8.4 Définition. Si $f: X \rightarrow Y$ est une application continue, on définit $C(f): C(X) \rightarrow C(Y)$ comme étant le morphisme obtenu par passage au quotient de $Q(f): Q(X) \rightarrow Q(Y)$.

Ceci définit un foncteur de la catégorie QT dans la catégorie G_Z des modules gradués différentiels. L'homologie de $C(X)$ est représentée simplement par $H(X)$ et on note $H(f): H(X) \rightarrow H(Y)$ le morphisme associé à $C(f): C(X) \rightarrow C(Y)$.

Si X est un espace quasi-topologique et $A \subset X$, $C(A)$ s'identifie à un sous-module gradué différentiel de $C(X)$. On définit les *groupes de chaînes relatives* $C(X, A) = \frac{C(X)}{C(A)}$. Si $X = A$, on a $C(X, A) = 0$ et, si $A = \emptyset$, $C(X, A)$ est canoniquement isomorphe à $C(X)$.

Si $f: (X, A) \rightarrow (X', A')$ est un morphisme de paires quasi-topologiques (c'est-à-dire $f: X \rightarrow X'$ est continue et $f(A) \subset A'$), alors $C(f)$

applique $C(A)$ dans $C(A')$ et on définit $C(f):C(X,A) \rightarrow C(X',A')$ comme étant le morphisme gradué différentiel obtenu par passage au quotient. Ceci détermine un foncteur de la catégorie QT_2 des paires quasi-topologiques dans la catégorie G_Z .

8.5 Proposition. *Si X est un espace quasi-topologique et $B \subset A \subset X$, alors, si $i:(A,B) \rightarrow (X,B)$ et $j:(X,B) \rightarrow (X,A)$ sont les inclusions, on a une suite exacte scindée*

$$0 \rightarrow C_n(A,B) \xrightarrow{C_n(i)} C_n(X,B) \xrightarrow{C_n(j)} C_n(X,A) \rightarrow 0.$$

Démonstration: Il suffit de voir que $C_n(X,B)$ est libre, avec pour base la classe des $S:I^n \rightarrow X$ non dégénérés et tels que $S(I^n) \not\subset B$; il en sera de même pour $C_n(A,B)$ et $C_n(X,A)$; alors la base libre de $C_n(X,B)$ est la somme des bases libres de $C_n(A,B)$ et $C_n(X,A)$, et on constate que $C_n(X,B)$ est une somme de $C_n(A,B)$ et $C_n(X,A)$, $C_n(i)$ étant une injection et $C_n(j)$ une projection.

D'après la proposition 8.5 on aura la suite exacte d'homologie du triplet (X,A,B) :

$$\dots H_{n+1}(X,B) \xrightarrow{H_{n+1}(j)} H_{n+1}(X,A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A,B) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(X,B) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X,A) \dots$$

et, prenant $B = \emptyset$ et les isomorphismes naturels, la suite exacte d'homologie de la paire (X,A) :

$$\dots H_{n+1}(X) \rightarrow H_{n+1}(X,A) \rightarrow H_n(A) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(X,A) \dots$$

Si E est un espace quasi-topologique, on peut définir un morphisme gradué de degré $+1$,

$$\bar{P}:D(E) \rightarrow Q(I \times E),$$

où $\bar{P}_n:D_n(E) \rightarrow C_{n+1}(I \times E)$ applique

$$S:I^n \rightarrow E \text{ sur } 1_I \times S:I^{n+1} \rightarrow I \times E.$$

Si S est dégénéré, alors $1_I \times S$ est dégénéré, donc $\bar{P}_n$ applique $D_n(E)$ dans $D_{n+1}(I \times E)$.

8.6 Définition. On définit

$$P'_n:C_n(E) \rightarrow C_{n+1}(I \times E)$$

par passage au quotient de $\bar{P}_n: Q_n(E) \rightarrow Q_{n+1}(E \times I)$. $P' = (P'_n)$ est appelé *opérateur prismatique*.

Si $A \subset E$, P'_n applique $C_n(A)$ dans $C_{n+1}(I \times A)$ et on peut donc définir $P_n: C_n(E, A) \rightarrow C_{n+1}(I \times E, I \times A)$ par passage au quotient de P'_n . Si $f: (E, A) \rightarrow (E', A')$ est un morphisme de paires quasi-topologiques, alors on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} C_n(E, A) & \xrightarrow{P_n} & C_{n+1}(I \times E, I \times A) \\ \downarrow C_n(f) & & \downarrow C_{n+1}(1_I \times f) \\ C_n(E', A') & \xrightarrow{P_n} & C_{n+1}(I \times E', I \times A') \end{array}$$

8.7 Proposition. Soient $\phi_0, \phi_1: (E, A) \rightarrow (I \times E, I \times A)$ définis par

$$\phi_0(x) = (0, x), \quad \phi_1(x) = (1, x).$$

Alors $d_{n+1} \circ P_n + P_{n-1} \circ d_n = C_n(\phi_1) - C_n(\phi_0)$.

Démonstration: Si $S: I^n \rightarrow E$ et $n = 0$ (donc $S = \hat{x}$), on a

$$d_1 P_0 S = d_1(1_I \times \hat{x}) = (1_I \times \hat{x}) \circ \lambda_1^1 - (1_I \times \hat{x}) \circ \lambda_1^0 = (1, \hat{x}) - (0, \hat{x}) = (C_0(\phi_1) - C_0(\phi_0))(S),$$

et $P_{-1} d_0 S = 0$, d'où la proposition. Si $n \geq 1$, on obtient

$$\begin{aligned} d_{n+1} P_n S + P_{n-1} d_n S &= d_{n+1}(1_I \times S) + P_{n-1} \left(\sum_{i=1}^n (-1)^i (S \circ \lambda_i^0 - S \circ \lambda_i^1) \right) = \\ &= \left[\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i ((1_I \times S) \circ \lambda_i^0 - (1_I \times S) \circ \lambda_i^1) \right] + \left[\sum_{i=1}^n (-1)^i (1_I \times (S \circ \lambda_i^0) - 1_I \times (S \circ \lambda_i^1)) \right] = \\ &= (1_I \times S) \circ \lambda_1^1 - (1_I \times S) \circ \lambda_{n+1}^0 \end{aligned}$$

(car $1_I \times (S \circ \lambda_i^1) = (1_I \times S) \circ \lambda_{i+1}^1$), c'est-à-dire

$$d_{n+1} P_n S + P_{n-1} d_n S = C_n(\phi_1)(S) - C_n(\phi_0)(S).$$

8.8 Corollaire. Si $f, g: (E, A) \rightarrow (E', A')$ sont homotopes dans QT_2 , alors les morphismes gradués différentiels

$$C(f), C(g): C(E, A) \rightarrow C(E', A')$$

sont homotopes; en particulier $H(f) = H(g): H(E, A) \rightarrow H(E', A')$.

Démonstration: Il existe $H: (I \times E, I \times A) \rightarrow (E', A')$ avec $H(0, x) = f(x)$ et $H(1, x) = g(x)$, c'est-à-dire $H \circ \phi_0 = f$ et $H \circ \phi_1 = g$. En définissant $K = C(H) \circ P: C(E) \rightarrow C(E')$ (morphisme gradué de degré $+1$), on voit que $C(g) - C(f) = C(H) \circ (C(\phi_1) - C(\phi_0)) = C(H) \circ (dP + Pd) = dC(H)P + C(H)Pd = dK + Kd$,

et K fournit donc l'homotopie désirée.

8.9 Corollaire. Le foncteur $QT_2 \rightarrow \underline{G}_Z$ (catégorie des modules gradués) qui associe, à $f: (E, A) \rightarrow (E', A')$, $H(f): H(E, A) \rightarrow H(E', A')$ se décompose à travers le quotient $\frac{QT_2}{\sim}$.

8.10 Proposition. Soit $\{a\}$ un espace réduit à un point; alors $H_p(\{a\}) = 0$ si $p \neq 0$ et $H_0(\{a\})$ est isomorphe à Z .

Démonstration: Si $p < 0$, $C_p(\{a\}) = 0$ et si $p > 0$ tout p -cube $S: I^p \rightarrow \{a\}$ est dégénéré, donc $C_p(\{a\}) = 0$. On voit donc que, si $p \neq 0$, $H_p(\{a\}) = 0$. Il existe un seul 0-cube $S: I^0 \rightarrow \{a\}$, de sorte que $C_0(\{a\}) = ZS$ est isomorphe à Z par $nS \mapsto n$, et on voit que

$$H_0(\{a\}) = \frac{Z_0(\{a\})}{B_0(\{a\})} = \frac{C_0(\{a\})}{(0)}$$

est isomorphe à Z , par $n|S| \mapsto n$.

8.11 Proposition. Si X est un espace quasi-topologique et si $A \subset X$ rencontre toute composante connexe par arcs de X , alors

$$H_0(X, A) = 0.$$

Démonstration: Pour chaque $x \in X$, soit $\omega_x: I \rightarrow X$ une application continue avec $\omega_x(1) = x$ et $\omega_x(0) \in A$. Soit

$$\lambda: C_0(X, A) \rightarrow C_1(X, A)$$

le morphisme qui associe ω_x à $\hat{x}$ ($x \notin A$). Comme

$$d\omega_x = \omega_x \circ \lambda_1^1 - \omega_x \circ \lambda_1^0 = \hat{x}$$

(puisque $\omega_x \circ \lambda_1^0 \in C_0(A)$ est nul dans $C_0(X, A)$), on voit que $d_1 \circ \lambda = 1_{C_0(X, A)}$, ce qui montre que tout élément de $C_0(X, A)$ est un bord; donc $H_0(X, A) = 0$.

8.12 Proposition. Soit X un espace quasi-topologique et $x_0 \in X$. Alors on a une suite exacte

$$0 \rightarrow H_0(\{x_0\}) \rightarrow H_0(X) \rightarrow H_0(X, \{x_0\}) \rightarrow 0.$$

Démonstration: Il suffit de démontrer que

$$H_0(1): H_0(\{x_0\}) \rightarrow H_0(X)$$

est injective, le reste résultant de la suite exacte d'homologie de

la paire $(X, \{x_0\})$. Or, soit $\bar{\epsilon}_X: C_0(X) \rightarrow Z$ le morphisme défini par $S \mapsto 1$. Si $S \in C_1(X)$, on a

$$\bar{\epsilon}_X dS = \bar{\epsilon}_X (S \circ \lambda_1^1 - S \circ \lambda_1^0) = 0,$$

donc $\bar{\epsilon}_X \circ d_1 = 0$ ce qui montre que, par passage au quotient, on a un morphisme $\epsilon_X: H_0(X) \rightarrow Z$. De même, on a un morphisme $\epsilon_{\{x_0\}}: H_0(\{x_0\}) \rightarrow Z$ qui est un isomorphisme (démonstration de 8.10). Puisque $\epsilon_{\{x_0\}} = \epsilon_X \circ H_0(1)$, il en résulte que $H_0(1)$ est injectif.

8.13 Corollaire. Si X est connexe par arcs, alors

$$H_0(\{x_0\}) \rightarrow H_0(X)$$

est un isomorphisme.

8.14 Proposition. Si $p \neq 0$, $H_p(X) \rightarrow H_p(X, \{x_0\})$ est un isomorphisme.

Démonstration: Si $p < 0$, ceci est trivial. Si $p \geq 2$, on a la suite exacte

$$H_p(\{x_0\}) \rightarrow H_p(X) \rightarrow H_p(X, \{x_0\}) \rightarrow H_{p-1}(\{x_0\}),$$

où $H_p(\{x_0\}) = 0 = H_{p-1}(\{x_0\})$, d'où le résultat. Pour $p = 1$, on a la suite exacte

$$H_1(\{x_0\}) \rightarrow H_1(X) \rightarrow H_1(X, \{x_0\}) \xrightarrow{\partial_1} H_0(\{x_0\}) \xrightarrow{H_0(1)} H_0(X);$$

par suite, $H_0(1)$ étant injectif, on a $\partial_1 = 0$, de sorte que

$$H_1(X) \rightarrow H_1(X, \{x_0\})$$

est surjectif; donc c'est un isomorphisme, car $H_1(\{x_0\}) = 0$.

Pour établir les propriétés de l'opérateur "division barycentrique" on aura besoin du "théorème des modèles acycliques" dans sa forme la plus générale (voir {22}). On va considérer la catégorie $\mathcal{QT}$, avec comme modèles les cubes I^n , $n \geq 0$. Chacun de ces I^n étant convexe dans $\mathbb{R}^n$, il sera contractile, c'est-à-dire isomorphe à $\{a\}$ dans $\frac{\mathcal{QT}}{\sim}$, ce qui entraîne, compte tenu de 8.10, que $H_p(I^n) = 0$ pour $p \neq 0$. Rappelons que, étant donné un foncteur $F: \mathcal{QT} \rightarrow G$ (catégorie des groupes abéliens), on peut considérer un foncteur $\tilde{F}: \mathcal{QT} \rightarrow G$ qui associe, à chaque espace quasi-topologique A , le module libre $\tilde{A}$ qui admet pour base la classe des (f, x) , $f \in A \cdot \mathcal{QT} \cdot I^n$, $x \in F(I^n)$, et associe,

à l'application continue $g:A \rightarrow B$, $\tilde{F}(g):\tilde{A} \rightarrow \tilde{B}$, morphisme qui applique (f,x) sur $(g \circ f, x)$. On peut aussi définir une transformation naturelle $\phi:\tilde{F} \rightarrow F$, où $\phi_A:\tilde{A} \rightarrow F(A)$ est le morphisme qui applique (f,x) sur $F(f)(x)$. Le foncteur F est dit *représentable* s'il existe une transformation naturelle $\psi:F \rightarrow \tilde{F}$ telle que $\phi \circ \psi = 1_F$. Ceci arrive, par exemple, si F est libre ("free" dans [16]).

8.15 Proposition. *Les foncteurs $C_n:QT \rightarrow G$ sont représentables.*

Démonstration ([22]): Si $n < 0$, le foncteur est 0 sur les objets, donc trivialement représentable. Si $n = 0$, le foncteur est libre, en particulier représentable (puisque'il n'y a pas de 0-cubes dégénérés, la classe des $C_0(f)(1_{I^0})$, $f \in A \cdot QT \cdot I^0$, est une base de $C_0(A)$). Supposant $n \geq 1$, soit, pour chaque $1 \leq i \leq n$,

$$F_i:I^n \rightarrow I^{n-1}, \quad (t_1, \dots, t_n) \mapsto (t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n).$$

On peut considérer, pour chaque espace quasi-topologique X et chaque i , $1 \leq i \leq n$, un morphisme

$$\psi_{X,i}:C_n(X) \rightarrow C_n(X)$$

qui associe, à $S:I^n \rightarrow X$, $S \circ \lambda_1^0 \circ F_i:I^n \rightarrow X$, et on définit le morphisme

$$\bar{\psi}_X:C_n(X) \rightarrow \tilde{C}_n(X)$$

comme étant le composé de

$$(\text{id} - \psi_{X,1}) \circ \dots \circ (\text{id} - \psi_{X,n}):C_n(X) \rightarrow C_n(X)$$

avec le morphisme

$$C_n(X) \rightarrow \tilde{C}_n(X), \quad S \mapsto (S, 1_{I^n}).$$

Si $D_{n,i}(X)$ est le sous-module de $D_n(X)$ engendré par les cubes i -dégénérés, on voit que $\text{id} - \psi_{X,i}$ applique $D_{n,i}(X)$ sur zéro et, pour $i \neq j$, $D_{n,j}(X)$ dans $D_{n,j}(X)$, ce qui montre que $\bar{\psi}_X$ est nul sur $D_{n,i}(X)$ et donne donc, par passage au quotient

$$\bar{\psi}_X:C_n(X) \rightarrow \tilde{C}_n(X).$$

$\psi = (\psi_X)$ définit une transformation naturelle de C_n dans $\tilde{C}_n$.

D'autre part, puisque $\psi_{X,i}$ applique $C_n(X)$ dans $D_n(X)$, on voit que $\phi_X \circ \psi_X:C_n(X) \rightarrow C_n(X)$ est l'identité.

On va passer maintenant à la définition de l'opérateur "division

barycentrique". Si $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$, on va définir l'application

$$\phi_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} : I^n \rightarrow I^n, \quad (t_1, \dots, t_n) \mapsto (t'_1, \dots, t'_n),$$

où

$$t'_i = \begin{cases} \frac{t_i}{2} & \text{si } \varepsilon_i = 0 \\ 1 - \frac{t_i}{2} & \text{si } \varepsilon_i = 1. \end{cases}$$

Si X est un espace quasi-topologique et $n \geq 0$, on définit

$$\bar{D}_n : Q_n(X) \rightarrow Q_n(X)$$

comme étant le morphisme qui applique $S : I^n \rightarrow X$ sur

$$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \mapsto (-1)^{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n} S \circ \phi_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}$$

(en particulier $\bar{D}_0 = 1_{Q_0(X)}$) et, si $n < 0$, on prend pour $\bar{D}_n$ le morphisme nul.

On voit immédiatement que, si $S : I^n \rightarrow X$ est dégénéré, alors $S \circ \phi_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}$ est aussi dégénéré, donc $\bar{D}_n$ applique $D_n(X)$ dans $D_n(X)$.

8.16 Définition. On définit $D_n : C_n(X) \rightarrow C_n(X)$ par passage au quotient de $\bar{D}_n : Q_n(X) \rightarrow Q_n(X)$.

8.17 Proposition. La famille des D_n définit un morphisme gradué différentiel $D : C(X) \rightarrow C(X)$.

Démonstration: On voit facilement que

$$\phi_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} \circ \lambda_i^0 = \begin{cases} \lambda_i^0 \circ \phi_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{i-1}, \varepsilon_{i+1}, \dots, \varepsilon_n} & \text{si } \varepsilon_i = 0 \\ \lambda_i^1 \circ \phi_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{i-1}, \varepsilon_{i+1}, \dots, \varepsilon_n} & \text{si } \varepsilon_i = 1 \end{cases}$$

et

$$\phi_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} \circ \lambda_i^1 = \lambda_i^0 \circ \phi_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{i-1}, \varepsilon_{i+1}, \dots, \varepsilon_n}.$$

Si $S : I^n \rightarrow X$ ($n \geq 1$), on voit que

$$\begin{aligned} d\phi S &= d\left(\sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} (-1)^{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n} S \circ \phi_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}\right) = \\ &= \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} (-1)^{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n} d(S \circ \phi_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}) = \\ &= \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} \sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n} (-1)^i (S \circ \phi_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} \circ \lambda_i^0 - S \circ \phi_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} \circ \lambda_i^1) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^{(\sum_{j \neq i} \epsilon_j)} (-1)^{i \text{Sol}_i^0 \circ \phi} \epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_n \\
 &- \sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^{(\sum_{j \neq i} \epsilon_j)} (-1)^{i \text{Sol}_i^1 \circ \phi} \epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_n \\
 &- \sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^{(\sum_{j \neq i} \epsilon_j)} (-1)^{i \text{Sol}_i^{\frac{1}{2}} \circ \phi} \epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_n + \\
 &+ \sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^{(\sum_{j \neq i} \epsilon_j)} (-1)^{i \text{Sol}_i^{\frac{1}{2}} \circ \phi} \epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_n = \\
 &= \sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^{\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{n-1}} (-1)^i (\text{Sol}_i^0 \circ \phi \epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1} - \text{Sol}_i^1 \circ \phi \epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1}) \\
 &= \sum_{i=1}^n (-1)^i (P(\text{Sol}_i^0) - P(\text{Sol}_i^1)) = \tilde{P} \left(\sum_{i=1}^n (-1)^i (\text{Sol}_i^0 - \text{Sol}_i^1) \right) = P \circ \tilde{\phi},
 \end{aligned}$$

d'où la proposition.

Si $g: X \rightarrow X'$ est une application continue, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 C(X) & \xrightarrow{P_X} & C(X) \\
 \downarrow C(g) & & \downarrow C(g) \\
 C(X') & \xrightarrow{P_{X'}} & C(X')
 \end{array}$$

c'est-à-dire que P définit une transformation naturelle de C dans C .

8.18 Proposition. Il existe une homotopie naturelle h entre les transformations naturelles P et 1_C de C dans C .

Démonstration: Chaque C_n étant un foncteur représentable et C étant un foncteur et acyclique dans les dimensions positives, alors, comme, pour $x \in \pi_0(C(X)) = C_0(X)$, on a $P_0(x) = x = 1_{C_0(X)}(x)$, de sorte que P et 1_C définissent la même transformation naturelle de $H_0 \circ C$ dans $H_0 \circ C$, le théorème des modèles acycliques entraîne l'existence d'une telle homotopie naturelle.

La proposition antérieure affirme qu'on peut choisir, pour chaque

espace quasi-topologique X , des morphismes

$$W_n: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)$$

de telle façon qu'on ait

$$1_{C_n(X)} - D_n = d_{n+1} W_n + W_{n-1} d_n$$

et que, si $g: X \rightarrow X'$ est une application continue, on ait un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{W_{X,n}} & C_{n+1}(X) \\ \downarrow C_n(g) & & \downarrow C_{n+1}(g) \\ C_n(X') & \xrightarrow{W_{X',n}} & C_{n+1}(X') \end{array}$$

8.19 Définition. Si X est un espace quasi-topologique et si $U = (V_\alpha)_{\alpha \in C}$ est une famille de sous-ensembles de X , on dira que U est *surfinalisante* si, quel que soit le filtre F dans X tel que $F \rightarrow x$, il existe $\alpha \in C$ tel que $V_\alpha \in F$.

Une telle famille est alors un recouvrement (considérer les filtres $x^\varepsilon \rightarrow x$) et est une famille finalisante (définition I 7.6 - il suffit de choisir $\alpha \in C$ tel que $V_\alpha \in F \cap x^\varepsilon$ et alors $x \in V_\alpha$ et $V_\alpha \in F$). Si X est un espace topologique, la famille U est *surfinalisante* si, et seulement si, la famille $(\text{int} V_\alpha)_{\alpha \in C}$ est un recouvrement de X .

8.20 Proposition. Soit X un espace quasi-topologique et $U = (V_\alpha)_{\alpha \in C}$ une famille de sous-ensembles telle qu'il existe un recouvrement $(U_\beta)_{\beta \in C}$ plus fin (c'est-à-dire $\forall \beta, \text{ il existe } \alpha, U_\beta \subset V_\alpha$) formé par des ouverts de X . Alors U est *surfinalisante*.

Démonstration: Si $F \rightarrow x$, $x \in U_\beta$, soit α tel que $U_\beta \subset V_\alpha$. Alors $U_\beta \in F$ (U_β ouvert), donc $V_\alpha \in F$.

Si X est un espace quasi-topologique et si $U = (V_\alpha)_{\alpha \in C}$ est une famille *surfinalisante*, on dit qu'un n -cube $S: I^n \rightarrow X$ est *petit d'ordre U* s'il existe α tel que $S(I^n) \subset V_\alpha$. Pour chaque n , on représente par $C_n^U(X)$ le sous-module de $C_n(X)$ engendré par les cubes *petits d'ordre U* et l'on voit immédiatement que la famille $C^U(X)$ des $C_n^U(X)$ définit un sous-module gradué différentiel de $C(X)$.

8.21 Proposition. Si X est un espace quasi-topologique et $\mathcal{U}$ une famille surfinalisante, alors pour tout $x \in C_n(X)$ il existe m_0 tel que, $\forall m > m_0$, on ait $\mathcal{D}_n^m(x) \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$.

Démonstration: Il suffit évidemment de considérer le cas où x est un n -cube singulier $S: I^n \rightarrow X$. Or, étant donné, pour chaque $z \in I^n$, le filtre des voisinages $\mathcal{V}_z$, on voit que $S(\mathcal{V}_z) \xrightarrow{X} S(z)$, de sorte qu'il existe α_z tel que $\mathcal{V}_{\alpha_z} \in S(\mathcal{V}_z)$; c'est-à-dire il existe $\rho_z > 0$ tel que $S(B(z, \rho_z)) \subset \mathcal{V}_{\alpha_z}$ ($B(z, \rho_z)$ étant la boule ouverte de centre z et de rayon ρ_z - la distance sur I^n étant

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max |y_i - x_i|.$$

Les $B(z, \frac{1}{2}\rho_z)$ constituent un recouvrement ouvert du compact I^n et on peut donc choisir $z_1, \dots, z_k \in I^n$ tels que les $B(z_k, \frac{1}{2}\rho_{z_k})$ recouvrent I^n . Si ϵ est le plus petit des ρ_{z_i} et si $A \subset I^n$ a un diamètre plus petit que $\frac{\epsilon}{2}$, A est contenu dans un $B(z, \rho_{z_i})$, et par suite $S(A)$ est contenu dans un $\mathcal{V}_{\alpha}$. Or chaque cube singulier apparaissant dans $\mathcal{D}^m S$ est de la forme

$$S \circ \phi_{\epsilon_1^1, \dots, \epsilon_n^1} \circ \dots \circ \phi_{\epsilon_1^m, \dots, \epsilon_n^m}$$

et l'image de

$$\phi_{\epsilon_1^1, \dots, \epsilon_n^1} \circ \dots \circ \phi_{\epsilon_1^m, \dots, \epsilon_n^m}: I^n \rightarrow I^n$$

est de la forme $I_1 \times \dots \times I_n$, où les I_i sont des intervalles d'amplitude $\frac{1}{2^m}$; donc, si $m > m_0$, $\frac{1}{2^m} < \frac{\epsilon}{2}$, et chaque cube de $\mathcal{D}^m S$ est petit d'ordre $\mathcal{U}$.

8.22 Lemme. $\mathcal{D}_n: C_n(X) \rightarrow C_n(X)$ applique $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ dans $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ et $\mathcal{D}_{n+1}: C_{n+1}(X) \rightarrow C_{n+1}(X)$ applique $C_{n+1}^{\mathcal{U}}(X)$ dans $C_{n+1}^{\mathcal{U}}(X)$.

Démonstration: Soit $S: I^n \rightarrow X$ un n -cube petit d'ordre $\mathcal{U}$, c'est-à-dire $S(I^n) \subset \mathcal{V}_{\alpha}$. Si $\iota: \mathcal{V}_{\alpha} \rightarrow X$ est l'inclusion et $S': I^n \rightarrow \mathcal{V}_{\alpha}$ le n -cube restriction, on a, en notant $\mathcal{D}'$ l'opérateur "division barycentrique" de l'espace $\mathcal{V}_{\alpha}$, $\mathcal{D} \circ C_n(\iota) = C_n(\iota) \circ \mathcal{D}'$, d'où

$$\mathcal{D}_n S = \mathcal{D}_n \circ C_n(\iota) S' = C_n(\iota) \circ \mathcal{D}' S',$$

ce qui montre que chaque cube apparaissant dans DS est "contenu" dans V_α , donc $DS \in C_n^U(X)$. Le cas de W_n est analogue.

8.23 Proposition. Soit X un espace quasi-topologique et U une famille surfinalisante de sous-ensembles. Alors l'inclusion

$$i: C^U(X) \rightarrow C(X)$$

est un morphisme gradué différentiel homotopiquement inversible.

Démonstration: Pour chaque $S: I^n \rightarrow X$, soit $n(S)$ le plus petit entier (≥ 0) tel que

$$D^{n(S)} S \in C_n^U(X), \quad D^{n(S)} (S \circ \lambda_i^\varepsilon) \in C_{n-1}^U(X), \quad D^{n(S)} (S \circ \lambda_i^\varepsilon \circ \lambda_{i'}^{\varepsilon'}) \in C_{n-2}^U(X) \dots$$

($\varepsilon, \varepsilon', \dots \in \{0, 1\}$). Si l'on tient compte du lemme antérieur, on voit que, pour tout $m \geq n(S)$ la même propriété est vérifiée. Soit

$$\bar{W}_n: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)$$

le morphisme qui applique S dans

$$W_n \circ \left(\sum_{i=0}^{n(S)-1} D_n^i \right) (S)$$

(D_n^0 étant l'identité et une somme de zéro terme étant nulle). Comme $n(S \circ \lambda_i^\varepsilon) \leq n(S)$, on voit que

$$\begin{aligned} d_{n+1} \bar{W}_n S &= d_{n+1} W_n \left(\sum_{i=0}^{n(S)-1} D_n^i \right) S = \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n(S)-1} D_n^i \right) S - D_n \left(\sum_{i=0}^{n(S)-1} D_n^i \right) S - W_{n-1} d_n \left(\sum_{i=0}^{n(S)-1} D_n^i \right) S = \\ &= S - D_n^{n(S)} S - W_{n-1} \left(\sum_{i=0}^{n(S)-1} D_n^i \right) d_n S = \\ &= S - D_n^{n(S)} S - W_{n-1} \left(\sum_{i=0}^{n(S)-1} D_n^i \right) \left(\sum_{j=1}^n (-1)^j S \circ \lambda_j^0 - S \circ \lambda_j^1 \right) = \\ &= S - D_n^{n(S)} S - \sum_{j=1}^n (-1)^j \left[W_{n-1} \left(\sum_{i=0}^{n(S)-1} D_n^i \right) S \circ \lambda_j^0 - W_{n-1} \left(\sum_{i=0}^{n(S)-1} D_n^i \right) S \circ \lambda_j^1 \right] = \\ &= S - D_n^{n(S)} S - \sum_{j=1}^n (-1)^j \left[W_{n-1} \left(\sum_{i=0}^{n(S \circ \lambda_j^0)-1} D_n^i \right) (S \circ \lambda_j^0) - W_{n-1} \left(\sum_{i=0}^{n(S \circ \lambda_j^1)-1} D_n^i \right) (S \circ \lambda_j^1) \right] = \\ &= S - D_n^{n(S)} S - \sum_{j=1}^n (-1)^j \left[W_{n-1} \left(\sum_{i=n(S \circ \lambda_j^0)}^{n(S)-1} D_n^i \right) (S \circ \lambda_j^0) - W_{n-1} \left(\sum_{i=n(S \circ \lambda_j^1)}^{n(S)-1} D_n^i \right) (S \circ \lambda_j^1) \right] = \\ &= S - D_n^{n(S)} S - \sum_{j=1}^n (-1)^j \left[\bar{W}_{n-1} (S \circ \lambda_j^0) - \bar{W}_{n-1} (S \circ \lambda_j^1) \right] = \\ &= S - D_n^{n(S)} S - \sum_{j=1}^n (-1)^j \left[W_{n-1} \left(\sum_{i=n(S \circ \lambda_j^0)}^{n(S)-1} D_n^i \right) (S \circ \lambda_j^0) - W_{n-1} \left(\sum_{i=n(S \circ \lambda_j^1)}^{n(S)-1} D_n^i \right) (S \circ \lambda_j^1) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= S \cdot \mathcal{P}_n^{n(S)} S \cdot \overline{W}_{n-1}^d S - \\
 &- \sum_{j=1}^n (-1)^j \left[W_{n-1} \left(\sum_{i=n(S \circ \lambda_j^0)}^{n(S)-1} \mathcal{P}_n^i (S \circ \lambda_j^0) \right) - W_{n-1} \left(\sum_{i=n(S \circ \lambda_j^1)}^{n(S)-1} \mathcal{P}_n^i (S \circ \lambda_j^1) \right) \right] = \\
 &= S \cdot p_n S \cdot \overline{W}_{n-1}^d S,
 \end{aligned}$$

où

$$p_n: C_n(X) \rightarrow C_n^U(X)$$

est le morphisme qui applique S sur

$$\mathcal{P}_n^{n(S)} S + \sum_{j=1}^n (-1)^j \left[W_{n-1} \left(\sum_{i=n(S \circ \lambda_j^0)}^{n(S)-1} \mathcal{P}_n^i (S \circ \lambda_j^0) \right) - W_{n-1} \left(\sum_{i=n(S \circ \lambda_j^1)}^{n(S)-1} \mathcal{P}_n^i (S \circ \lambda_j^1) \right) \right]$$

(cet élément appartient à $C_n^U(X)$ vu le lemme antérieur).

Si $S: I^n \rightarrow X$ est petit d'ordre U , alors

$$S \circ \lambda_i^\varepsilon, S \circ \lambda_i^\varepsilon \circ \lambda_i^{\varepsilon'}, \dots$$

sont petits d'ordre U , d'où $n(S) = 0$ et par suite $p_n S = S$. On voit ainsi que $poi = id$ et $id \circ p = d \circ \overline{W} + \overline{W} \circ d$, en particulier ceci entraîne que p est différentiel; il en résulte que p est différentiel, et que $p: C(X) \rightarrow C^U(X)$ est homotopiquement inverse de i .

8.24 Corollaire. Sous les hypothèses de la proposition antérieure,

$$H(i): H(C^U(X)) \rightarrow H(X)$$

est un isomorphisme.

8.25 Définition. Si X est un espace quasi-topologique et $X_1, X_2 \subset X$, on dit que (X_1, X_2) est une *paire excisive de sous-ensembles* si l'inclusion

$$C(X_1) + C(X_2) \rightarrow C(X)$$

induit un isomorphisme entre les groupes d'homologie.

8.26 Corollaire. Si la famille $(X_i)_{i \in \{1,2\}}$ est surfinalisante, alors (X_1, X_2) est une paire excisive.

Démonstration: Il suffit de remarquer que $C(X_1) + C(X_2)$ est précisément $C^U(X)$.

8.27 Proposition. Soit X un espace quasi-topologique, soient

$X_1, X_2 \subset X$ et

$$\epsilon: (X_1, X_1 \cap X_2) \rightarrow (X, X_2)$$

l'inclusion. Alors, pour que (X_1, X_2) soit une paire excisive, il faut et il suffit que

$$H(\epsilon): H(X_1, X_1 \cap X_2) \rightarrow H(X, X_2)$$

soit un isomorphisme.

Démonstration: On a un diagramme commutatif de morphismes gradués différentiels

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & C(X_2) & \longrightarrow & C(X) & \longrightarrow & C(X, X_2) \rightarrow 0 \\ & & \uparrow 1 & & \uparrow 1 & & \uparrow \mu \\ 0 & \rightarrow & C(X_2) & \rightarrow & C(X_1) + C(X_2) & \rightarrow & \frac{C(X_1) + C(X_2)}{C(X_2)} \rightarrow 0 \\ & & \uparrow 1' & & \uparrow 1'' & & \uparrow \lambda \\ 0 & \rightarrow & C(X_1 \cap X_2) & \rightarrow & C(X_1) & \rightarrow & C(X_1, X_1 \cap X_2) \rightarrow 0 \end{array}$$

où λ est un isomorphisme d'après le théorème d'isomorphisme de Noether (on a $C(X_1 \cap X_2) = C(X_1) \cap C(X_2)$). Si on écrit la suite exacte d'homologie des deux premières lignes, on voit d'après le lemme des 5 que $H(1)$ est un isomorphisme si, et seulement si, $H(\mu)$ est un isomorphisme, donc si, et seulement si, $H(\mu) \circ H(\lambda) = H(\mu \circ \lambda)$ est un isomorphisme. Mais, $\mu \circ \lambda = C(\epsilon)$, d'où $H(\mu \circ \lambda) = H(\epsilon)$ et il en résulte la proposition.

8.28 Corollaire. Soient X un espace quasi-topologique, $A, B \subset X$ tels qu'il existe un fermé F et un ouvert U avec $B \subset F \subset U \subset A$. Alors, si

$$\epsilon: (X-B, A-B) \rightarrow (X, A)$$

est l'inclusion, $H(\epsilon)$ est un isomorphisme.

Démonstration: En posant $X_1 = X-B$, $X_2 = A$, on voit que

$$X_1 \cap X_2 = A-B \text{ et } X = (X-F) \cup U$$

avec $X-F$ et U ouverts, $X-F \subset X-B$, $U \subset A$, ce qui entraîne (8.20 et 8.26) que (X_1, X_2) est une paire excisive, et le corollaire résulte de la proposition antérieure.

On présente maintenant une condition suffisante pour que, étant donné l'espace quasi-topologique X et $A \subset X$, et considérant le quotient quasi-topologique $\frac{X}{A}$ avec son point distingué ω , $H(X, A)$ soit

isomorphe à $H(\frac{X}{A}, \{\omega\})$. La démonstration de la proposition suit celle qui est présentée dans {23}.

8.29 Proposition. Soient X un espace quasi-topologique et $A \subset X$ un fermé tel que l'inclusion $i: A \rightarrow X$ soit une cofibration. Alors, si

$$f: (X, A) \rightarrow (\frac{X}{A}, \{\omega\})$$

est l'application canonique,

$$H_n(f): H_n(X, A) \rightarrow H_n(\frac{X}{A}, \{\omega\})$$

est un isomorphisme.

Démonstration: Si $A = \emptyset$, on sait que $\frac{X}{A}$ est une somme disjointe de X et $\{\omega\}$ (lesquels sont donc ouverts), f étant alors l'inclusion et la proposition découle de 8.28. Supposons $A \neq \emptyset$. Soient (2.9) des applications continues $\phi: X \rightarrow I$, $D: X \times I \rightarrow X$ telles que

$$\phi(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A, \quad D(x, 0) = x, \quad D(a, t) = a \text{ si } a \in A \text{ et}$$

$$D(x, 1) \in A \text{ si } \phi(x) < 1.$$

$\frac{X}{A} \times I$ ayant la quasi-topologie finale définie par

$$X \times I \rightarrow \frac{X}{A} \times I,$$

par passage au quotient on obtient des applications continues

$$\hat{\phi}: \frac{X}{A} \rightarrow I, \quad \hat{D}: \frac{X}{A} \times I \rightarrow \frac{X}{A}$$

et on voit que

$$\hat{\phi}(y) = 0 \Leftrightarrow y = \omega, \quad \hat{D}(y, 0) = y,$$

$$\hat{D}(\omega, t) = \omega \text{ et } \hat{D}(y, 1) = \omega \text{ si } \hat{\phi}(y) < 1.$$

Soient

$$U = \phi^{-1}([0, \frac{1}{2}[), \quad F = \phi^{-1}([0, \frac{1}{4}]), \quad U' = \hat{\phi}^{-1}([0, \frac{1}{2}[), \quad F' = \hat{\phi}^{-1}([0, \frac{1}{4}]),$$

U et U' sont ouverts dans X et $\frac{X}{A}$ et F et F' fermés dans X et $\frac{X}{A}$, avec $A \subset F \subset U$, $\{\omega\} \subset F' \subset U'$. On a des morphismes de paires

$$\begin{cases} \xi: (X, U) \rightarrow (X, A), & \xi(x) = D(x, 1) \\ \hat{\xi}: (\frac{X}{A}, U') \rightarrow (\frac{X}{A}, \{\omega\}), & \hat{\xi}(y) = \hat{D}(y, 1) \end{cases}$$

et on a des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccccc}
 (X, A) & \xrightarrow{i} & (X, U) & \xrightarrow{\xi} & (X, A) & & (X-F, U-F) & \xrightarrow{j} & (X, U) \\
 \downarrow f & & \downarrow k & & \downarrow f & & \downarrow k' & & \downarrow k \\
 (\frac{X}{A}, \{\omega\}) & \xrightarrow{\hat{i}} & (\frac{X}{A}, U) & \xrightarrow{\hat{\xi}} & (\frac{X}{A}, \{\omega\}) & & (\frac{X}{A}-F', U'-F') & \xrightarrow{\hat{j}} & (\frac{X}{A}, U')
 \end{array}$$

où i , $\hat{i}$, j , $\hat{j}$ sont des inclusions, où $k: (X, U) \rightarrow (\frac{X}{A}, U)$ est l'application canonique et k' une restriction de k . D'après I 2.8, $k': X-F \rightarrow \frac{X}{A}-F'$ définit dans $\frac{X}{A}-F'$ la quasi-topologie finale; k' étant bijectif, c'est un homéomorphisme, donc un isomorphisme de $\mathcal{QT}_2$. D'après 8.28, $H(j)$ et $H(\hat{j})$ sont des isomorphismes et il en résulte que

$$H(k): H(X, U) \rightarrow H(\frac{X}{A}, U)$$

est un isomorphisme. Mais, dans $\mathcal{QT}_2$, $\xi \circ i$ est homotope à $1_{(X, A)}$ et $\hat{\xi} \circ \hat{i}$ homotope à $1_{(\frac{X}{A}, \{\omega\})}$, les homotopies étant fournies par D et $\hat{D}$.

Il s'ensuit que

$$H(\xi) \circ H(i) = H(\xi \circ i) = H(1d) = id, \quad H(\hat{\xi}) \circ H(\hat{i}) = H(\hat{\xi} \circ \hat{i}) = H(1d) = id;$$

ainsi $H(i)$ est un monomorphisme et $H(\xi)$ un épimorphisme, donc

$$H(f) \circ H(\xi) = H(\hat{\xi}) \circ H(k)$$

est un épimorphisme et

$$H(\hat{i}) \circ H(f) = H(k) \circ H(i)$$

un monomorphisme, ce qui entraîne que $H(f)$ est un épimorphisme et un monomorphisme, c'est-à-dire un isomorphisme.

Rappelons que, étant donné les modules gradués différentiels

$$C = (C_n), \quad C' = (C'_n),$$

on définit leur produit tensoriel $C \otimes C'$ en notant

$$(C \otimes C')_n = \sum_{i+j=n} C_i \otimes C'_j.$$

Si C et C' sont munis de dérivations d et d' de degré -1 , on considère $C \otimes C'$ muni de la dérivation d'' , où

$$d'': (C \otimes C')_n \rightarrow (C \otimes C')_{n-1}$$

est définie par la condition d'appliquer chaque $x_i \otimes x'_j$ sur

$$(d_i x_i) \otimes x'_j + (-1)^i x_i \otimes (d'_j x'_j).$$

Le théorème d'Eilenberg-Zilber, qu'on va démontrer, montre qu'il

existe un isomorphisme entre les groupes d'homologie $H(X \times Y)$ du produit des espaces quasi-topologiques X et Y et les groupes d'homologie $H(C(X) \otimes C(Y))$. On utilisera le théorème des modèles acycliques.

Considérons deux foncteurs

$$C', C'' : \mathcal{Q}T \times \mathcal{Q}T \rightarrow G_Z$$

qui associent, à

$$(f, g) : (X, Y) \rightarrow (X', Y'),$$

respectivement

$$C(f) \otimes C(g) : C(X) \otimes C(Y) \rightarrow C(X') \otimes C(Y'),$$

$$C(f \times g) : C(X \times Y) \rightarrow C(X' \times Y').$$

Nous considérons dans la catégorie $\mathcal{Q}T \times \mathcal{Q}T$ comme modèles les (I^k, I^l) , $k, l \geq 0$.

8.30 Lemme. Pour chaque n , les foncteurs

$$C'_n : \mathcal{Q}T \times \mathcal{Q}T \rightarrow G,$$

$$C''_n : \mathcal{Q}T \times \mathcal{Q}T \rightarrow G$$

sont représentables.

Démonstration: Considérons $C'_n : \mathcal{Q}T \times \mathcal{Q}T \rightarrow G$; on doit montrer qu'il existe une transformation naturelle ψ'_n de C'_n vers $\tilde{C}'_n$ telle que $\phi'_n \circ \psi'_n = 1_{C'_n}$ (pour les notations voir les remarques qui précèdent la proposition 8.15). Or $C_i : \mathcal{Q}T \rightarrow G$ étant représentable, il existe une transformation naturelle ψ_i de C_i vers $\tilde{C}_i$ telle que $\phi_i \circ \psi_i = 1_{C_i}$.

D'autre part, il existe une transformation naturelle $(\phi \otimes \phi)_n$ du foncteur $(\tilde{C} \otimes \tilde{C})_n$ vers le foncteur $(C \otimes C)_n = C'_n$, où

$$(\phi \otimes \phi)_n : (\tilde{C}(X) \otimes \tilde{C}(Y))_n \rightarrow (C(X) \otimes C(Y))_n$$

est le morphisme qui applique

$$x_i \otimes y_j \text{ sur } \phi_i(x_i) \otimes \phi_j(y_j) \quad (i+j = n).$$

De même on a une transformation naturelle $(\psi \otimes \psi)_n$ de C'_n vers $(\tilde{C} \otimes \tilde{C})_n$ et l'on vérifie immédiatement que

$$(\phi \otimes \phi)_n \circ (\psi \otimes \psi)_n = 1.$$

Pour chaque X, Y et n , soit

$$k_n: (\tilde{C}(X) \otimes \tilde{C}(Y))_n \rightarrow \tilde{C}'(X, Y)$$

le morphisme qui applique

$$(f_i, x_i) \otimes (g_j, y_j) \text{ sur } ((f_i, g_j), x_i \otimes y_j) \\ (f_i: I^k \rightarrow X, x_i \in C_i(I^k), g_j: I^l \rightarrow Y, y_j \in C_j(I^l)).$$

On voit que les k_n définissent une transformation naturelle de $(\tilde{C} \otimes \tilde{C})_n$ vers $\tilde{C}'_n$ et qu'on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{C}(X) \otimes \tilde{C}(Y))_n & \xrightarrow{k_n} & \tilde{C}'(X, Y) \\ (\phi \otimes \phi)_n \searrow & & \swarrow \phi'_n \\ (C(X) \otimes C(Y))_n & = & C'_n(X, Y) \end{array} .$$

On prend maintenant pour $\psi'_n: C'_n \rightarrow \tilde{C}'_n$ le composé $k_n \circ (\psi \otimes \psi)_n$ et l'on constate que ψ'_n vérifie $\phi'_n \circ \psi'_n = 1_{C'_n}$.

Considérons maintenant le foncteur $C''_n: \mathcal{Q}T \times \mathcal{Q}T \rightarrow G$; il faut montrer qu'il existe une transformation naturelle ψ''_n de C''_n vers $\tilde{C}''_n$ telle que $\phi''_n \circ \psi''_n = 1_{C''_n}$.

Pour chaque X, Y et n , soit

$$\ell_n: \tilde{C}_n(X \times Y) \rightarrow \tilde{C}''_n(X, Y)$$

le morphisme qui applique

$$(h, z_n) \text{ sur } ((p_1 \circ h, p_2 \circ h), C_n(\alpha)(z_n)) \\ (h: I^m \rightarrow X \times Y, z_n \in C_n(I^m)), \text{ où } \alpha: I^m \rightarrow I^m \times I^m \text{ est la diagonale} \\ w \rightsquigarrow (w, w) .$$

On voit que les ℓ_n définissent une transformation naturelle de $\tilde{C}_n \circ X$ (où $X: \mathcal{Q}T \times \mathcal{Q}T \rightarrow \mathcal{Q}T$ est le foncteur "produit d'espaces quasi-topologiques") vers $\tilde{C}''_n$, et qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C}_n(X \times Y) & \xrightarrow{\ell_n} & \tilde{C}''_n(X, Y) \\ \phi_n \searrow & & \swarrow \phi''_n \\ C_n(X \times Y) & = & C''_n(X, Y) \end{array}$$

(puisque $[(p_1 \circ h) \times (p_2 \circ h)] \circ \alpha = h$).

On prend maintenant pour

$$\psi''_n: C''_n(X, Y) \rightarrow \tilde{C}''_n(X, Y)$$

le composé

$$C_n(X \times Y) \xrightarrow{\psi_n} \tilde{C}_n(X \times Y) \xrightarrow{\iota_n} \tilde{C}''_n(X, Y)$$

et l'on voit que les ψ_n'' définissent une transformation naturelle et que $\phi_n'' \circ \psi_n'' = \text{id}$.

8.31 Lemme. Pour $n \geq 1$, $k, l \geq 0$, on a

$$H_n(C'(I^k, I^l)) = 0 = H_n(C''(I^k, I^l)).$$

Démonstration: On a $C''(I^k, I^l) = C(I^k \times I^l)$ et on sait déjà que, pour $n \geq 1$, $H_n(I^k \times I^l) = 0$ ($I^k \times I^l$ étant convexe, donc isomorphe à $\{0\}$ dans $\frac{OT}{\sim}$). En ce qui concerne $H_n(C'(I^k, I^l))$, la formule de Künneth (5.3.3 de [16]) montre qu'il existe un isomorphisme

$$[H(C(I^k)) \otimes H(C(I^l))]_n \xrightarrow{\mu} H_n(C(I^k) \otimes C(I^l)) = H_n(C'(I^k, I^l))$$

(le produit de torsion $[H(C(I^k)) * H(C(I^l))]_{n-1}$ étant nul puisque, pour $n \neq 0$, $H_n(C(I^m)) = 0$, et que $H_0(C(I^m))$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, donc libre), d'où le résultat.

Etant donné les espaces quasi-topologiques X, Y , on définit, pour chaque n , un morphisme

$$\eta_n : (C(X) \otimes C(Y))_n \rightarrow C_n(X \times Y)$$

par la condition d'appliquer

$$S_i \otimes T_j \text{ sur } I_i \times I_j$$

($i+j = n$, $S_i : I^i \rightarrow X$, $T_j : I^j \rightarrow Y$, $S_i \times T_j : I^n \rightarrow X \times Y$). η_n est bien défini puisque $S_i \times T_j$ est dégénéré si S_i ou T_j l'est.

8.32 Proposition. $\eta = (\eta_n)$ est un morphisme gradué différentiel de $C(X) \otimes C(Y)$ vers $C(X \times Y)$.

Démonstration: Soit $S_i : I^i \rightarrow X$, $T_j : I^j \rightarrow Y$ ($i+j = n$). On a

$$\begin{aligned} \eta_{n-1} \circ d_n''(S_i \otimes T_j) &= \eta_{n-1}((d_i S_i) \otimes T_j + (-1)^i S_i \otimes (d_j T_j)) = \\ &= \eta_{n-1} \left[\left(\sum_{\alpha=1}^i (-1)^\alpha (S_i \circ \lambda_\alpha^0 - S_i \circ \lambda_\alpha^1) \right) \otimes T_j + (-1)^i S_i \otimes \left(\sum_{\beta=1}^j (-1)^\beta (T_j \circ \lambda_\beta^0 - T_j \circ \lambda_\beta^1) \right) \right] = \\ &= \sum_{\alpha=1}^i (-1)^\alpha ((S_i \circ \lambda_\alpha^0) \times T_j - (S_i \circ \lambda_\alpha^1) \times T_j) + (-1)^i \sum_{\beta=1}^j (-1)^\beta (S_i \times (T_j \circ \lambda_\beta^0) - S_i \times (T_j \circ \lambda_\beta^1)) = \\ &= \sum_{\alpha=1}^i (-1)^\alpha ((S_i \times T_j) \circ \lambda_\alpha^0 - (S_i \times T_j) \circ \lambda_\alpha^1) + \sum_{\beta=1}^j (-1)^{i+\beta} ((S_i \times T_j) \circ \lambda_{i+\beta}^0 - (S_i \times T_j) \circ \lambda_{i+\beta}^1) \end{aligned}$$

$$= d_n''(S_i \times T_j) = d_n'' \circ \eta_n(S_i \otimes T_j) .$$

8.33 Théorème (Eilenberg-Zilber). Chaque

$$H_n(\eta): H_n(C(X) \otimes C(Y)) \rightarrow H_n(X \times Y)$$

est un isomorphisme.

Démonstration: On vérifie aisément que les η définissent une transformation naturelle du foncteur C' vers le foncteur C'' .

On voit que, si l'espace quasi-topologique X a pour composantes connexes par arcs les X_α , alors $C(X)$ est somme directe des $C(X_\alpha)$ (puisque l'image de tout n -cube, étant connexe par arcs, est contenue dans l'un des X_α). Il s'ensuit que, $i_\alpha: X_\alpha \rightarrow X$ étant les inclusions, chaque $H_n(X)$ est somme directe des $H_n(X_\alpha)$, les injections étant

$$H_n(i_\alpha): H_n(X_\alpha) \rightarrow H_n(X) .$$

La formule de Künneth (5.3.3 de [16]) montre qu'il existe un isomorphisme

$$\mu: H_0(X) \otimes H_0(Y) = [H(X) \otimes H(Y)]_0 \rightarrow H_0(C(X) \otimes C(Y)) ,$$

lequel applique $|x| \otimes |y|$ sur $|x \otimes y|$.

Compte tenu de 8.10 et 8.13, si l'on choisit, pour chaque α , $x_\alpha \in X_\alpha$, on voit que $H_0(X)$ est un groupe abélien libre qui admet pour base les $|\hat{x}_\alpha|$. Si Y_β sont les composantes connexes par arcs de Y , les composantes connexes par arcs de $X \times Y$ sont $X_\alpha \times Y_\beta$ et l'on voit que le composé

$$H_0(X) \otimes H_0(Y) \xrightarrow{\mu} H_0(C(X) \otimes C(Y)) \xrightarrow{H_0(\eta)} H_0(X \times Y)$$

applique $|x_\alpha| \otimes |y_\beta|$ sur $|(x_\alpha, y_\beta)|$ et est donc un isomorphisme; il s'ensuit que $H_0(\eta)$ est aussi un isomorphisme.

Le théorème des modèles acycliques montre alors qu'il existe une transformation naturelle η' de C'' vers C' telle que $H_0(\eta') = H_0(\eta)^{-1}$, et le même théorème entraîne que, $\eta' \circ \eta$ étant une transformation naturelle de C' vers C' qui induit sur $H_0 \circ C'$ la même transformation naturelle que $1_{C'}$, $\eta' \circ \eta$ sera homotope à $1_{C'}$, par une homotopie naturelle, donc $H_n(\eta') \circ H_n(\eta) = id$; de même $H_n(\eta) \circ H_n(\eta') = id$, ce qui montre que $H_n(\eta)$ est un isomorphisme.

9. Homomorphisme de Hurewicz. Théorème de Hurewicz.

Pour définir l'homomorphisme d'Hurewicz, on va commencer par calculer les groupes d'homologie des sphères S_n , déterminant explicitement les générateurs.

9.1 Lemme. Si $i: S_n \rightarrow CS_n$ est l'inclusion, i est une cofibration.

Démonstration: Commençons par remarquer que S_n est fermé dans CS_n . Si $n = 0$, on a $S_0 = \{0, \omega\}$ (quasi-topologie discrète et pointée en ω), donc $CS_0 = I \times S_0$ est homéomorphe à I par

$$(t, 0) \rightsquigarrow t, (t, \omega) \rightsquigarrow 0,$$

l'image de $S_0 \subset CS_0$ étant $\{0, 1\} \subset I$ et la proposition résulte de 6.6.

Nous supposons maintenant $n > 0$. Compte tenu de 2.6 il nous suffit de montrer qu'il existe

$$F: CS_n \times I \rightarrow CS_n \times I$$

tel que $F(x) \in CS_n \times \{0\} \cup S_n \times I$ et que, si $x \in CS_n \times \{0\} \cup S_n \times I$, $F(x) = x$. Comme CS_n a la quasi-topologie finale définie par $I \times S_n \rightarrow CS_n$, $CS_n \times I$ a aussi la quasi-topologie finale définie par $I \times S_n \times I \rightarrow CS_n \times I$. Il nous suffit donc de construire $G: I \times S_n \times I \rightarrow I \times S_n \times I$ telle que

$$G(t, x, t') \in I \times \{\omega\} \times I \cup \{0\} \times S_n \times I \cup \{1\} \times S_n \times I \cup I \times S_n \times \{0\} = A$$

et $G(t, x, t') = (t, x, t')$ si $(t, x, t') \in A$.

Mais, $I \times S_n \times I$ ayant la quasi-topologie finale définie par

$$I \times I^n \times I \xrightarrow{1_I \times \theta_n \times 1_I} I \times S_n \times I,$$

il nous suffit de voir qu'il existe $H: I \times I^n \times I \rightarrow I \times I^n \times I$ telle que

$$H(t, x, t') \in I \times I^n \times I \cup \{0\} \times I^n \times I \cup \{1\} \times I^n \times I \cup I \times I^n \times \{0\} = B$$

et $H(t, x, t') = (t, x, t')$ si $(t, x, t') \in B$. Or on voit que

$$B = I^{n+1} \times I \cup I^{n+1} \times \{0\}$$

et la proposition découle de 6.5.

9.2 Proposition. Pour chaque $n \geq 1$, soit

$$\alpha_n: (CS_{n-1}, S_{n-1}) \rightarrow (S_n, \{\omega\}),$$

$$t \alpha_n \rightsquigarrow \omega, t \alpha_{n-1}(t_1, \dots, t_{n-1}) \rightsquigarrow \theta_n(t, t_1, \dots, t_{n-1})$$

(voir 5.17); alors

$$H_p(\alpha_n):H_p(CS_{n-1},S_{n-1}) \rightarrow H_p(S_n,\{\omega\})$$

est un isomorphisme pour chaque p .

Démonstration: α_n est, à une bijection près, l'application canonique

$$(CS_{n-1},S_{n-1}) \rightarrow (\frac{CS_{n-1}}{S_{n-1}},\{\omega\}) ;$$

il nous suffit de voir, tenant compte de 8.29 et de 9.1, que

$\alpha_n:CS_{n-1} \rightarrow S_n$ définit dans S_n la quasi-topologie finale. Si $n = 1$, on a $S_0 = \{0,\omega\}$, CS_0 homéomorphe à I par

$$(t,0) \rightsquigarrow t, \quad (t,\omega) \rightsquigarrow 0,$$

$\alpha_1:CS_0 \rightarrow S_1$ se transformant en $\theta_1:I \rightarrow S_1$, d'où le résultat. Si $n > 1$, $\theta_{n-1}:I^{n-1} \rightarrow S_{n-1}$ étant surjective, $I \times S_{n-1}$ a la quasi-topologie finale définie par

$$l_I \times \theta_{n-1}:I^n \rightarrow I \times S_{n-1},$$

donc $CS_{n-1} = I \times S_{n-1}$ a la quasi-topologie finale définie par

$$I^n \rightarrow CS_{n-1};$$

pour montrer que α_n définit sur S_n la quasi-topologie finale, il suffit de voir que la composition

$$I^n \xrightarrow{l_I \times \theta_{n-1}} I \times S_{n-1} \rightarrow CS_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n} S_n$$

définit la quasi-topologie finale sur S_n , et ceci résulte du fait que c'est simplement θ_n .

9.3 Définition. On définit les applications continues

$$G_n:I^n \rightarrow CS_{n-1}, \quad G_n(t_1,\dots,t_n) = t_1 \times \theta_{n-1}(t_2,\dots,t_n) \quad (n \geq 1).$$

9.4 Proposition. $G_n:I^n \rightarrow CS_{n-1}$, en tant qu'élément de $C_n(CS_{n-1},S_{n-1})$, et $\theta_n:I^n \rightarrow S_n$, en tant qu'élément de $C_n(S_n,\{\omega\})$, sont des cycles.

Démonstration: Il suffit de remarquer que chaque $G_n \circ \lambda_i^E$ prend ses valeurs dans S_{n-1} et que chaque $\theta_n \circ \lambda_i^E$ est identiquement ω .

9.5 Proposition. Les propriétés (P_n) ($n \geq 0$) et (Q_n) ($n \geq 1$) suivantes sont vraies:

$(P_n) \quad H_p(S_n, \{\omega\}) = 0$ si $p \neq n$ et $H_n(S_n, \{\omega\})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ par un isomorphisme qui applique $|\theta_n|$ sur 1.

$(Q_n) \quad H_p(CS_{n-1}, S_{n-1}) = 0$ si $p \neq n$ et $H_n(CS_{n-1}, S_{n-1})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ par un isomorphisme qui applique $|G_n|$ sur 1.

Démonstration: a) On va démontrer (P_0) : On a $S_0 = \{0, \omega\}$ avec la quasi-topologie discrète (donc $\{\omega\}$ est ouvert et fermé), et, si $i: C(\{0\}) \rightarrow C(\{0, \omega\}, \{\omega\})$ est l'inclusion (on identifie $C(\{0\})$ à $C(\{0\}, \emptyset)$), il résulte de 8.28 que

$$H(i): H(\{0\}) \rightarrow H(\{0, \omega\}, \{\omega\})$$

est un isomorphisme; il nous suffit maintenant de tenir compte de 8.10 et de l'isomorphisme $H_0(\{0\}) \rightarrow \mathbb{Z}$ qui y est construit.

b) On va démontrer que $(P_n) \Rightarrow (Q_{n+1})$ ($n \geq 0$) : Or, on peut considérer la suite exacte d'homologie du triplet $(CS_n, S_n, \{\omega\})$:

$$H_p(CS_n, \{\omega\}) \rightarrow H_p(CS_n, S_n) \xrightarrow{\partial_p} H_{p-1}(S_n, \{\omega\}) \rightarrow H_{p-1}(CS_n, \{\omega\}),$$

où

$$H_p(CS_n, \{\omega\}) = H_{p-1}(CS_n, \{\omega\}) = 0$$

(car, d'après 4.24, $(CS_n, \{\omega\})$ est isomorphe dans $\frac{\mathcal{AT}_2}{\sim}$ à $(\{a\}, \{a\})$ et l'on tient compte de 3.9). On voit donc que ∂_p est un isomorphisme. Il en résulte que, si $p \neq n+1$, on a $H_p(CS_n, S_n) = 0$; pour voir que $H_{n+1}(CS_n, S_n)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ par un isomorphisme qui applique $|G_{n+1}|$ sur 1, il nous suffit de voir que ∂_{n+1} applique $|G_{n+1}|$ sur $|\theta_n|$. Or, considérant G_{n+1} dans $(CS_n, \{\omega\})$, on a

$$\partial G_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i (G_{n+1} \circ \lambda_i^0 - G_{n+1} \circ \lambda_i^1) = G_{n+1} \circ \lambda_1^1$$

($G_{n+1} \circ \lambda_1^0$ et, si $i \geq 2$, $G_{n+1} \circ \lambda_i^1$ prennent leurs valeurs dans $\{\omega\}$) et l'élément de $C_n(S_n, \{\omega\})$ qui est appliqué par

$$C_n(S_n, \{\omega\}) \rightarrow C_n(CS_n, \{\omega\})$$

sur $G_{n+1} \circ \lambda_1^1$ est précisément θ_n , d'où $\partial_{n+1}(|G_{n+1}|) = |\theta_n|$.

c) On va démontrer que $(Q_n) \Rightarrow (P_n)$ ($n \geq 1$) : On sait, d'après 9.2, que

$$H_p(S_n, \{\omega\}) \oplus H_p(CS_{n-1}, S_{n-1}) \rightarrow H_p(CS_n, \{\omega\})$$

est un isomorphisme. On a donc $H_p(S_n, \{\omega\}) = 0$ si $p \neq n$, et si l'on tient compte du fait que $H_p(\alpha_n)(|G_n|) = |\theta_n|$ ($\alpha_n \circ G_n = \theta_n$), on voit

que $H_n(S_n, \{\omega\})$ est isomorphe à Z , par un isomorphisme qui applique $|\theta_n|$ sur 1.

9.6 Définition. Si (X, A, x_0) est une paire quasi-topologique pointée, on représente par h_n ($n \geq 1$) l'application

$$\pi_n(\hat{X}, \hat{A}) \rightarrow H_n(X, A)$$

qui applique

$$|\alpha|, \quad \alpha: (CS_{n-1}, S_{n-1}) \rightarrow (\hat{X}, \hat{A}) \quad , \text{ sur } H_n(\alpha)(|G_n|) \\ (H_n(\alpha): H_n(CS_{n-1}, S_{n-1}) \rightarrow H_n(X, A)).$$

9.7 Remarque. h_n est bien défini parce que, si α est homotope à β dans QT_{*2} , la paire sous-jacente est homotope dans QT_2 et l'on tient compte de 8.8.

Les h_n de la définition antérieure sont appelés *homomorphismes de Hurewicz* (on verra plus tard que, pour $n \geq 2$, les h_n définissent des morphismes de groupes).

9.8 Proposition. Si $f: (\hat{X}, \hat{A}) \rightarrow (\hat{Y}, \hat{B})$ est un morphisme de QT_{*2} , alors on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(\hat{X}, \hat{A}) & \xrightarrow{h_n} & H_n(X, A) \\ \downarrow \pi_n(f) & & \downarrow H_n(f) \\ \pi_n(\hat{Y}, \hat{B}) & \xrightarrow{h_n} & H_n(Y, B) \end{array}.$$

Démonstration: Si $|\alpha| \in \pi_n(\hat{X}, \hat{A})$, $\alpha: (CS_{n-1}, S_{n-1}) \rightarrow (\hat{X}, \hat{A})$, on voit que $\pi_n(f)(|\alpha|) = |f \circ \alpha|$, $h_n(|f \circ \alpha|) = H_n(f \circ \alpha)(|G_n|) = H_n(f) \circ H_n(\alpha)(|G_n|) = H_n(f)(H_n(\alpha)(|G_n|)) = H_n(f)(h_n(|\alpha|))$.

9.9 Proposition. Soit (X, A, x_0) une paire quasi-topologique pointée. Le diagramme suivant est alors commutatif, pour chaque $n \geq 1$,

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_{n+1}(\hat{X}, \hat{A}) & \xrightarrow{\hat{\Delta}_{n+1}} & \pi_n(\hat{A}, \{\hat{x}_0\}) & \xrightarrow{\pi_n(i)} & \pi_n(\hat{X}, \{\hat{x}_0\}) & \xrightarrow{\pi_n(j)} & \pi_n(\hat{X}, \hat{A}) \\ \downarrow h_{n+1} & & \downarrow h_n & & \downarrow h_n & & \downarrow h_n \\ H_{n+1}(X, A) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(A, \{x_0\}) & \xrightarrow{H_n(i)} & H_n(X, \{x_0\}) & \xrightarrow{H_n(j)} & H_n(X, A) \end{array}$$

Démonstration: Tenant compte de la proposition antérieure, la seule partie à démontrer est la commutativité du carré de gauche. Soit $|\alpha| \in \pi_{n+1}(\hat{X}, \hat{A})$, $\alpha: (CS_n, S_n) \rightarrow (\hat{X}, \hat{A})$. On voit que

$$h_{n+1}(|\alpha|) = H_{n+1}(\alpha)(|G_{n+1}|) = |\alpha \circ G_{n+1}|,$$

où $\alpha \circ G_{n+1}: I^{n+1} \rightarrow X$ est défini par

$$\alpha \circ G_{n+1}(t_1, \dots, t_{n+1}) = \alpha(t_1 \circ \theta_n(t_2, \dots, t_{n+1})).$$

Pour calculer $\partial_{n+1}(h_{n+1}(|\alpha|))$, on considère $\alpha \circ G_{n+1}$ comme un élément de $C_{n+1}(X, \{x_0\})$ et l'on voit que

$$d(\alpha \circ G_{n+1}) = \alpha \circ G_{n+1} \circ \lambda_1^1$$

($\alpha \circ G_{n+1} \circ \lambda_i^0$ et $\alpha \circ G_{n+1} \circ \lambda_i^e$, si $i \geq 2$, sont identiquement x_0), qui peut être considéré comme une application $I^n \rightarrow A$, définie par

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto \alpha(1 \circ \theta_n(t_1, \dots, t_n)).$$

L'image de $|\alpha|$ dans $\pi_n(\hat{A})$ est $|\alpha|$, où $\alpha: S_n \rightarrow \hat{A}$ est défini par

$$\theta_n(t_1, \dots, t_n) \mapsto \alpha(1 \circ \theta_n(t_1, \dots, t_n));$$

il s'ensuit $\hat{\Delta}_{n+1}(|\alpha|) = |\tilde{\alpha}|$, $\tilde{\alpha}: (CS_{n-1}, S_{n-1}) \rightarrow (\hat{A}, \{\hat{x}_0\})$,

$$\tilde{\alpha}(t_1 \circ \theta_{n-1}(t_2, \dots, t_n)) = \alpha(1 \circ \theta_n(t_1, \dots, t_n))$$

et l'on vérifie que

$$h_n(|\tilde{\alpha}|) = H_n(\tilde{\alpha})(|G_n|) = |\tilde{\alpha} \circ G_n|,$$

où $\tilde{\alpha} \circ G_n: I^n \rightarrow A$ est défini par

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto \tilde{\alpha}(t_1 \circ \theta_{n-1}(t_2, \dots, t_n)) = \alpha(1 \circ \theta_n(t_1, \dots, t_n)),$$

d'où le résultat.

Rappelons que, si (X, A, x_0) est une paire quasi-topologique pointée, alors il existe un isomorphisme ($n \geq 1$)

$$\pi_n(\hat{E}(X, A, A), \hat{E}(A, A, A)) \rightarrow \pi_{n+1}(\hat{X}, \hat{A})$$

qui est le composé

$$\pi_n(\hat{E}(X, A, A), \hat{E}(A, A, A)) \xrightarrow{\pi_n(i)^{-1}} \pi_n(\hat{E}(X, x_0, A), \{\hat{x}_0\}) \xrightarrow{i_n^{-1}} \pi_n(\hat{E}(X, x_0, A)) \xrightarrow{\gamma_n} \pi_{n+1}(\hat{X}, \hat{A}).$$

On va maintenant définir un morphisme

$$\sigma_n: H_n(E(X, A, A), E(A, A, A)) \rightarrow H_{n+1}(X, A).$$

9.10 Proposition. Soit (X, A) une paire quasi-topologique. Il existe un morphisme gradué anti-différentiel

$$\xi: C(E(X, A, A), E(A, A, A)) \rightarrow C(X, A) ,$$

de degré $+1$, où

$$\xi_n: C_n(E(X, A, A), E(A, A, A)) \rightarrow C_{n+1}(X, A)$$

est le morphisme qui applique $T: I^n \rightarrow E(X, A, A)$ sur $\hat{T}: I^{n+1} \rightarrow X$,

$$\hat{T}(t_1, \dots, t_{n+1}) = T(t_2, \dots, t_{n+1})(t_1) .$$

Démonstration: ξ_n est un morphisme bien défini, car, si T est dégénéré, $\hat{T}$ est dégénéré et, si $T(I^n) \subset E(A, A, A)$, $\hat{T}(I^{n+1}) \subset A$. Si $T: I^n \rightarrow E(X, A, A)$, on voit que

$$d_{n+1} \xi_n T = d_{n+1} \hat{T} = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i (\hat{T} \circ \lambda_i^0 - \hat{T} \circ \lambda_i^1) = \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^i (\hat{T} \circ \lambda_i^0 - \hat{T} \circ \lambda_i^1) ,$$

puisque $\hat{T} \circ \lambda_1^e(I^n) \subset A$, donc $\hat{T} \circ \lambda_1^e$ est nul dans $C_n(X, A)$. Tenant compte du fait que, pour $i \geq 2$,

$$\hat{T} \circ \lambda_i^e = T \circ \lambda_{i-1}^e ,$$

on obtient

$$d_{n+1} \xi_n T = \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^i (T \circ \lambda_{i-1}^0 - T \circ \lambda_{i-1}^1) = \xi_{n-1} \left(- \sum_{j=1}^n (-1)^j (T \circ \lambda_j^0 - T \circ \lambda_j^1) \right) = - \xi_{n-1} d_n T ,$$

ce qui montre que ξ est anti-différentiel.

9.11 Définition. On représente par

$$\sigma_n: H_n(E(X, A, A), E(A, A, A)) \rightarrow H_{n+1}(X, A)$$

le morphisme associé à ξ .

9.12 Proposition. Si (X, A, x_0) est une paire quasi-topologique pointée, on a, pour chaque $n \geq 1$, un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(\hat{E}(X, A, A), \hat{E}(A, A, A)) & \longrightarrow & \pi_{n+1}(\hat{X}, \hat{A}) \\ \downarrow h_n & & \downarrow h_{n+1} \\ H_n(E(X, A, A), E(A, A, A)) & \xrightarrow{\sigma_n} & H_{n+1}(X, A) \end{array}$$

Démonstration: Si l'on tient compte du fait que $\pi_n(\iota)$ est un isomorphisme $(\iota: (\hat{E}(X, x_0, A), \hat{x}_0) \rightarrow (\hat{E}(X, A, A), \hat{E}(A, A, A)))$ et de 9.8 , il suffit de prouver la commutativité de

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(\hat{E}(X, x_0, A), \{\hat{x}_0\}) & \xrightarrow{\gamma_n \circ \iota_n^{-1}} & \pi_{n+1}(\hat{X}, \hat{A}) \\ \downarrow h_n & & \downarrow h_{n+1} \\ H_n(\hat{E}(X, x_0, A), \{\hat{x}_0\}) & \xrightarrow{\sigma_n \circ H_n(1)} & H_{n+1}(X, A) \end{array} .$$

Soit donc $\alpha: (CS_{n-1}, S_{n-1}) \rightarrow (\hat{E}(X, x_0, A), \{\hat{x}_0\})$. On voit que

$$h_n(|\alpha|) = H_n(\alpha)(|G_n|) = |\alpha \circ G_n| ,$$

où

$$\alpha \circ G_n: I^n \rightarrow \hat{E}(X, x_0, A) , \quad (t_1, \dots, t_n) \mapsto \alpha(t_1 \otimes_{\theta_{n-1}} (t_2, \dots, t_n)) ,$$

et alors

$$\sigma_n \circ H_n(1)(h_n(|\alpha|)) = |\hat{\alpha}| ,$$

$$\hat{\alpha}: I^{n+1} \rightarrow X , \quad \hat{\alpha}(t, t_1, \dots, t_n) = \alpha(t_1 \otimes_{\theta_{n-1}} (t_2, \dots, t_n))(t) .$$

D'autre part, $\iota_n^{-1}(|\alpha|) = |\alpha'|$, avec

$$\alpha': S_n \rightarrow \hat{E}(X, x_0, A) , \quad \alpha'(\theta_n(t_1, \dots, t_n)) = \alpha(t_1 \otimes_{\theta_{n-1}} (t_2, \dots, t_n)) ,$$

donc $\gamma_n \circ \iota_n^{-1}(|\alpha|) = |\tilde{\alpha}|$, avec

$$\tilde{\alpha}: (CS_n, S_n) \rightarrow (\hat{X}, \hat{A}) , \quad \tilde{\alpha}(t \otimes_{\theta_n} (t_1, \dots, t_n)) = \alpha(t_1 \otimes_{\theta_{n-1}} (t_2, \dots, t_n))(t) ;$$

ainsi

$$h_{n+1}(|\tilde{\alpha}|) = H_{n+1}(\tilde{\alpha})(|G_{n+1}|) = |\tilde{\alpha} \circ G_{n+1}| ,$$

où $\tilde{\alpha} \circ G_{n+1}: I^{n+1} \rightarrow X$,

$$\tilde{\alpha} \circ G_{n+1}(t, t_1, \dots, t_n) = \tilde{\alpha}(t \otimes_{\theta_n} (t_1, \dots, t_n)) = \alpha(t_1 \otimes_{\theta_{n-1}} (t_2, \dots, t_n))(t) ;$$

la proposition en découle.

La proposition antérieure nous servira assez souvent pour la démonstration par récurrence des propriétés de l'homomorphisme d'Hurewicz h_n .

9.13 Proposition. Si (X, x_0) est un espace quasi-topologique pointé, le composé

$$\pi_1(\dot{X}) \xrightarrow{\iota_1} \pi_1(\dot{X}, \{\dot{x}_0\}) \xrightarrow{h_1} H_1(X, \{x_0\})$$

définit un morphisme de groupes.

Démonstration: Si $|\alpha| \in \pi_1(\dot{X})$, $\alpha: S_1 \rightarrow \hat{X}$, on voit que

$$\iota_1(|\alpha|) = |\alpha'| , \quad \alpha': (CS_0, S_0) \rightarrow (\hat{X}, \{\hat{x}_0\}) ,$$

$$\alpha'(t \otimes 0) = \alpha(\theta_1(t)) , \quad \alpha'(t \otimes \omega) = x_0 ,$$

donc

$$h_1 \circ i_1(|\alpha|) = H_1(\alpha')(|G_1|) = |\alpha' \circ G_1| ,$$

$$\alpha' \circ G_1 : I \rightarrow X , \quad t \mapsto \alpha'(\tau \alpha 0) = \alpha(\theta_1(t)) ,$$

c'est-à-dire $h_1 \circ i_1(|\alpha|) = |\alpha \circ \theta_1|$. Etant donné aussi $|\beta| \in \pi_1(\hat{X})$, $\beta : S_1 \rightarrow \hat{X}$, alors $|\alpha| \cdot |\beta| = |\gamma|$, où $\gamma : S_1 \rightarrow \hat{X}$,

$$\gamma(\theta_1(t)) = \begin{cases} \alpha(\theta_1(2t)), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(\theta_1(2t-1)), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} .$$

On peut définir $S : I^2 \rightarrow X$ par

$$S(t_1, t_2) = \begin{cases} \alpha(\theta_1(t_1 + 2t_2)), & 0 \leq t_2 \leq \frac{1-t_1}{2} \\ \beta(\theta_1(\frac{t_1 + 2t_2 - 1}{t_1 + 1})), & \frac{1-t_1}{2} \leq t_2 \leq 1 \end{cases}$$

et l'on vérifie que

$$Sol_1^0 = \gamma \circ \theta_1 , \quad Sol_1^1 = \beta \circ \theta_1 , \quad Sol_2^0 = \alpha \circ \theta_1 , \quad Sol_2^1 = \hat{x}_0 ;$$

donc, dans $C(X, \{x_0\})$,

$$dS = \alpha \circ \theta_1 + \beta \circ \theta_1 - \gamma \circ \theta_1$$

et, dans $H_1(X, \{x_0\})$,

$$|\alpha \circ \theta_1 + \beta \circ \theta_1 - \gamma \circ \theta_1| = 0 , \quad |\alpha \circ \theta_1| + |\beta \circ \theta_1| = |\gamma \circ \theta_1| ,$$

$$h_1 \circ i_1(|\alpha| \cdot |\beta|) = h_1 \circ i_1(|\alpha|) + h_1 \circ i_1(|\beta|) .$$

9.14 Proposition. Si (X, A, x_0) est une paire quasi-topologique pointée, alors

$$h_n : \pi_n(\hat{X}, \hat{A}) \rightarrow H_n(X, A)$$

définit un morphisme de groupes pour chaque $n \geq 2$.

Démonstration: Tenant compte de 9.12 et de 9.8, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\hat{E}(X, x_0, A), \hat{x}_0) & \xrightarrow{\gamma_1 \circ i_1^{-1}} & \pi_2(\hat{X}, \hat{A}) \\ \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 \\ H_1(E(X, x_0, A), \{\hat{x}_0\}) & \xrightarrow{\sigma_1 \circ H_1(1)} & H_2(X, A) , \end{array}$$

donc le composé $h_2 = \sigma_1 \circ H_1(1) \circ (h_1 \circ i_1) \circ \gamma_1^{-1}$

défini un morphisme de groupes. Supposant la proposition démontrée pour un certain $n \geq 2$, la proposition 9.12 montre que h_{n+1} est le composé d'applications définissant des morphismes de groupes, donc en définit un.

Evidemment $h_1: \pi_1(\hat{X}, \hat{A}) \rightarrow H_1(X, A)$ n'est pas un morphisme de groupes ($\pi_1(\hat{X}, \hat{A})$ étant simplement un ensemble pointé). Tout ce qu'on peut affirmer c'est que:

9.15 Proposition. $h_1: \pi_1(\hat{X}, \hat{A}) \rightarrow H_1(X, A)$ définit une application pointée.

Démonstration: On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\{\hat{x}_0\}, \{\hat{x}_0\}) & \xrightarrow{\pi_1(1)} & \pi_1(\hat{X}, \hat{A}) \\ \downarrow h_1 & & \downarrow h_1 \\ H_1(\{x_0\}, \{x_0\}) & \xrightarrow{H_1(1)} & H_1(X, A) \end{array}$$

où $H_1(\{x_0\}, \{x_0\}) = 0$; donc, si $*$ et $*$ ' sont les points bases de $\pi_1(\hat{X}, \hat{A})$ et $\pi_1(\{\hat{x}_0\}, \{\hat{x}_0\})$,

$$h_1(*) = h_1 \circ \pi_1(1)(*)' = H_1(1) \circ h_1(*)' = H_1(1)(0) = 0.$$

Le théorème d'Hurewicz nous donne des conditions suffisantes pour qu'un certain h_n soit même un isomorphisme. C'est vers la démonstration de ce théorème que sera dirigé le reste de ce paragraphe.

Dans la suite on va voir que l'homologie de $C(X, A)$ peut être calculée par l'homologie d'un certain sous-module gradué différentiel $\hat{C}(X, A)$: C'est la proposition 9.21, qui ressemble à 7.5.8 de [16]. Les lemmes suivants nous aideront à démontrer cette proposition. Certaines démonstrations sont du type de celles employées souvent par Serre dans [21].

9.16 Lemme. Soit X un espace quasi-topologique et soient, pour chaque $n \geq 0$, $C_n \subset C'_n$ des classes de n -cubes singuliers $T: I^n \rightarrow X$ telles que, si $T \in C_n$, $T \circ \lambda_1^\varepsilon \in C_n$ et de même pour C'_n . On a alors des sous-modules gradués différentiels $\hat{C}(X) \subset \hat{C}'(X)$ de $C(X)$, où $\hat{C}_n(X)$ est engendré par les cubes dans C_n et $\hat{C}'_n(X)$ par les cubes dans C'_n . Supposons qu'on peut associer, à chaque n -cube singulier $S: I^n \rightarrow X$ dans C'_n , un $(n+1)$ -cube singulier FS dans C'_{n+1} de façon que:

- a) $FS\alpha_1^0 = S$;
- b) $FS\alpha_1^1 = \bar{S} \in C_n$;
- c) Si $S \in C_n$, $FS(t, t_1, \dots, t_n) = S(t_1, \dots, t_n)$;
- d) Si S est i -dégénéré , FS est $(i+1)$ -dégénéré ;
- e) $F(S\alpha_i^\varepsilon) = FS\alpha_{i+1}^\varepsilon$.

Alors, l'inclusion $\lambda: \hat{C}(X) \rightarrow \hat{C}'(X)$ est homotopiquement inversible.

Démonstration: Il est évident que $\hat{C}(X)$ et $\hat{C}'(X)$ sont des sous-modules gradués différentiels. Soit $\mu_n: \hat{C}'_n(X) \rightarrow \hat{C}_n(X)$ le morphisme qui applique S sur $\bar{S}$ (si S est i -dégénéré, FS est $(i+1)$ -dégénéré, donc $\bar{S} = FS\alpha_1^1$ est dégénéré) , soit $\mu = (\mu_n)$. Alors $\mu \circ \lambda = 1_{\hat{C}(X)}$.
Définissons

$$L_n: \hat{C}'_n(X) \rightarrow \hat{C}'_{n+1}(X)$$

comme étant le morphisme qui applique S sur FS ; si $S: I^n \rightarrow X$, on a, si $n = 0$,

$$d_1 L_0 S + L_{-1} d_0 S = d_1 L_0 S = d(FS) = FS\alpha_1^1 - FS\alpha_1^0 = \bar{S} - S = \lambda \circ \mu S - S ,$$

et, si $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} d_{n+1} L_n S + L_{n-1} d_n S &= d_{n+1}(FS) + L_{n-1} \left(\sum_{i=1}^n (-1)^i (S\alpha_i^0 - S\alpha_i^1) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i (FS\alpha_i^0 - FS\alpha_i^1) + \sum_{i=1}^n (-1)^i (FS\alpha_{i+1}^0 - FS\alpha_{i+1}^1) = \\ &= FS\alpha_1^1 - FS\alpha_0^1 = \bar{S} - S = \lambda \circ \mu S - S . \end{aligned}$$

Ceci montre que $\lambda \circ \mu$ est différentiel, donc μ est différentiel et $\lambda \circ \mu$ est homotope à $1_{\hat{C}'(X)}$, ce qui montre que μ est homotopiquement l'inverse de λ .

9.17 Lemme. Soit (X, A, x_0) une paire quasi-topologique pointée telle que $\pi_n(\hat{X}, \hat{A}) = 0$ (pour un certain $n \geq 1$). Soit $f: I^n \rightarrow X$ telle que

$$f(\{1\} \times I^{n-1}) \subset A , \quad f(\{0\} \times I^{n-1} \cup I \times I^{n-1}) \subset \{x_0\} .$$

Il existe alors $\bar{f}: I \times I^n \rightarrow X$ telle que

$$\bar{f}(0, x) = f(x) , \quad \bar{f}(1, x) = x_0 ,$$

$$\bar{f}(I \times \{1\} \times I^{n-1}) \subset A , \quad \bar{f}(I \times \{0\} \times I^{n-1} \cup I \times I \times I^{n-1}) \subset \{x_0\} .$$

Démonstration: Soit

$$\lambda: I^{n-1} \rightarrow E(X, x_0, A) , \quad \lambda(x)(t) = f(t, x) .$$

On a $\pi_{n-1}(\hat{E}(X, x_0, A)) = 0$ et l'on peut définir

$$\bar{\lambda}: S_{n-1} \rightarrow \hat{E}(X, x_0, A) , \quad \bar{\lambda}(\theta_{n-1}(t_1, \dots, t_{n-1})) = \lambda(t_1, \dots, t_{n-1}) , \quad \bar{\lambda}(\omega) = \hat{x}_0 ;$$

alors $\bar{\lambda}$ est homotope à $\hat{x}_0$, ce qui montre qu'il existe

$$\hat{\lambda}: I \times S_{n-1} \rightarrow E(X, x_0, A)$$

avec

$$\hat{\lambda}(0, y) = \bar{\lambda}(y) , \quad \hat{\lambda}(1, y) = \hat{x}_0 , \quad \hat{\lambda}(t, \omega) = \hat{x}_0 ;$$

il résulte que l'on peut définir

$$\tilde{\lambda}: I \times I^{n-1} \rightarrow E(X, x_0, A) , \quad \tilde{\lambda}(t, x) = \hat{\lambda}(t, \theta_{n-1}(x))$$

et finalement on obtient

$$\bar{f}: I \times I \times I^{n-1} \rightarrow X , \quad \bar{f}(t', t, x) = \tilde{\lambda}(t', x)(t)$$

qui vérifie les conditions du lemme.

9.18 Lemme. Sous les conditions du lemme antérieur et si

$$g: \{0\} \times I^n \cup I \times \dot{I}^n \rightarrow X$$

est tel que

$$g(\{1\} \times \{1\} \times I^{n-1}) \subset A , \quad g(\{1\} \times \{0\} \times I^{n-1} \cup \{1\} \times I \times \dot{I}^{n-1}) \subset \{x_0\} ,$$

il existe

$$\bar{g}: I \times I^n \rightarrow X ,$$

prolongeant g et tel que

$$\bar{g}(\{1\} \times I^n) \subset A , \quad \bar{g}(\{1\} \times I_{\frac{1}{2}}^n) \subset \{x_0\} .$$

Démonstration: On peut considérer l'homéomorphisme

$$C_1: \dot{I}^{n+1} \xrightarrow{\cong} \dot{I}^{n+1}$$

du lemme 6.3, en y échangeant les rôles de la première et de la dernière variable, et le prolonger en un homéomorphisme

$$\bar{C}_1: I^{n+1} \rightarrow I^{n+1} , \quad \bar{C}_1(A(|x, t|)) = A(|C_1(x), t|) .$$

On définit alors

$$g': \{0\} \times I^n \rightarrow X , \quad g'(y) = g(C_1(y)) ;$$

d'après le lemme antérieur on peut considérer $\bar{g}': I^{n+1} \rightarrow X$ prolongeant g' et remplissant les conditions indiquées sur f ; il suffit de prendre

$$\bar{g}: I^{n+1} \rightarrow X, \quad \bar{g}(y) = \bar{g}'(\bar{C}_1^{-1}(y)),$$

pour que $\bar{g}$ satisfasse les conditions de l'énoncé.

9.19 Lemme. Sous les conditions des lemmes antérieurs, si $n \geq 2$ et si

$$h: \{0\} \times I^n \cup I \times \dot{I}^n \rightarrow X$$

est tel que

$$h(\{1\} \times \dot{I}^n) \subset A, \quad h(\{1\} \times \{0\} \times I_{\frac{1}{2}}^{n-1}) \subset \{x_0\},$$

il existe $\bar{h}: I^{n+1} \rightarrow X$ prolongeant h et tel que

$$h(\{1\} \times I^n) \subset A, \quad \bar{h}(\{1\} \times I_{\frac{1}{2}}^n) \subset \{x_0\}.$$

Démonstration: Considérons l'homéomorphisme

$$C_{\frac{1}{2}}: \dot{I}^n \rightarrow \dot{I}^n$$

du lemme 6.3, en échangeant les rôles de la première et de la dernière variable. Considérons le prolongement (homéomorphisme)

$$\bar{C}_{\frac{1}{2}}: I^n \rightarrow I^n, \quad \bar{C}_{\frac{1}{2}}(A(|x, t|)) = A(|C_{\frac{1}{2}}(x), t|).$$

Soit $\alpha: I^{n+1} \rightarrow I^{n+1}$ l'homéomorphisme

$$\alpha(t', y) = (t', \bar{C}_{\frac{1}{2}}(y));$$

on peut considérer

$$h': \{0\} \times I^n \cup I \times \dot{I}^n \rightarrow X, \quad h'(z) = h(\alpha^{-1}(z)),$$

et h' vérifie les conditions du lemme antérieur; si l'on prend le prolongement $\bar{h}': I^{n+1} \rightarrow X$ de h' vérifiant les conditions de ce lemme, et si l'on définit

$$\bar{h}: I^{n+1} \rightarrow X, \quad \bar{h}(z) = \bar{h}'(\alpha(z)),$$

$\bar{h}$ prolonge h et vérifie les conditions de l'énoncé.

9.20 Lemme. Soit (X, A, x_0) une paire quasi-topologique pointée, où X et A sont connexes par arcs, et soit $n \geq 0$ tel que, pour tout

$1 \leq i \leq n$, on ait $\pi_1(\hat{X}, \hat{A}) = 0$. Soit $\tilde{C}_p(X, A)$ le sous-module de $C_p(X, A)$ engendré par les cubes $T: I^p \rightarrow X$ tels que:

- 1) T applique le n-squelette de I^p dans A (c'est-à-dire $T(t_1, \dots, t_p) \in A$ si le nombre des "ii" tels que $t_i \notin \{0, 1\}$ est $\leq n$);
- 2) T applique le milieu de chaque j -face ($1 \leq j \leq n, p$) de I^p sur x_0 (c'est-à-dire, si l'on fixe $p-j$ variables dans $\{0, 1\}$, l'application correspondante $I^j \rightarrow X$ applique $I_{\frac{1}{2}}^j$ sur x_0);
- 3) T applique les sommets de I^p sur x_0 .

Alors $\tilde{C}(X, A)$ est un sous-module gradué différentiel de $C(X, A)$ et l'inclusion

$$\lambda: \tilde{C}(X, A) \rightarrow C(X, A)$$

induit des isomorphismes pour les groupes d'homologie.

Démonstration: Le fait que $\tilde{C}(X, A)$ est un sous-module gradué différentiel résulte de ce que, si T obéit aux conditions 1), 2) et 3), il en est de même pour chaque $T \circ \lambda_1^{\epsilon}$. On peut aussi considérer les sous-modules gradués différentiels $\tilde{C}(X)$ de $C(X)$ et $\tilde{C}(A)$ de $C(A)$ et l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \tilde{C}(A) & \rightarrow & \tilde{C}(X) & \rightarrow & \tilde{C}(X, A) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \lambda'' & & \downarrow \lambda' & & \downarrow \lambda \\ 0 & \rightarrow & C(A) & \rightarrow & C(X) & \rightarrow & C(X, A) \rightarrow 0 \end{array}$$

avec les lignes exactes; si l'on démontre que $\lambda': \tilde{C}(X) \rightarrow C(X)$ induit des isomorphismes sur les groupes d'homologie, il en résultera que $\lambda'': \tilde{C}(A) \rightarrow C(A)$ induit des isomorphismes pour les groupes d'homologie (car $\pi_1(\hat{A}, \hat{A}) = 0$); en passant aux suites d'homologie, et appliquant le lemme des 5, on en déduira que λ induit des isomorphismes pour les groupes d'homologie.

En fait on va même voir que $\lambda': \tilde{C}(X) \rightarrow C(X)$ est homotopiquement inversible, ceci en appliquant le lemme 9.1C, avec C_p classe des cubes obéissant à 1), 2) et 3) et C'_p classe de tous les cubes. On construit la correspondance $S \rightsquigarrow FS$ par induction sur la dimension des cubes:

- 1) Si $S: I^0 \rightarrow X$ est un 0-cube, donc $S = \hat{a}$, on pose, si $a = x_0$, $FS: I \rightarrow X$, $FS = \hat{x}_0$, et, si $a \neq x_0$, on choisit $FS: I \rightarrow X$ avec

$FS(0) = a$, $FS(1) = x_0$ (X est connexe par arcs) .

2) Supposons la correspondance $S \rightsquigarrow FS$ construite pour tous les cubes de dimension $\leq p$, avec les conditions de 9.16 . Soit $T: I^{p+1} \rightarrow X$ un $(p+1)$ -cube.

a) Supposons que T est dégénéré, choisissons i tel que T soit i -dégénéré. Soit

$$T': I^p \rightarrow X , \quad T'(t_1, \dots, t_p) = T(t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_p) \\ \text{(donc } T' = T \circ \lambda_i^0 = T \circ \lambda_i^1 \text{) , soit}$$

$$FT: I^{p+2} \rightarrow X , \quad FT(t_1, \dots, t_{p+2}) = FT'(t_1, \dots, t_i, t_{i+2}, \dots, t_{p+2}) .$$

FT est, par définition, $(i+1)$ -dégénéré.

Si T est aussi j -dégénéré, $j \neq i$, alors

si $j < i$, T' est j -dégénéré, donc FT' $(j+1)$ -dégénéré,
si $j > i$, T' est $(j-1)$ -dégénéré, donc FT' j -dégénéré,

ce qui montre que FT est $(j+1)$ -dégénéré.

On a

$$FT \circ \lambda_1^0(t_1, \dots, t_{p+1}) = FT(0, t_1, \dots, t_{p+1}) = FT'(0, t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_{p+1}) = \\ = T'(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_{p+1}) = T(t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_{p+1}) = \\ = T(t_1, \dots, t_i, \dots, t_{p+1}) ,$$

donc $FT \circ \lambda_1^0 = T$.

Le fait que $FT' \circ \lambda_1^1$ est dans C_p entraîne que $FT \circ \lambda_1^1$ est dans C_{p+1} .

Si $T \in C_{p+1}$, on a $T' \in C_p$, d'où

$$FT(t, t_1, \dots, t_{p+1}) = FT'(t, t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_{p+1}) = \\ = T'(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_{p+1}) = T(t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_{p+1}) = \\ = T(t_1, \dots, t_{i-1}, t_i, \dots, t_{p+1}) .$$

On a

$$FT \circ \lambda_{i+1}^\epsilon(t_1, \dots, t_{p+1}) = FT(t_1, \dots, t_i, \epsilon, t_{i+1}, \dots, t_{p+1}) = \\ = FT'(t_1, \dots, t_i, t_{i+1}, \dots, t_{p+1}) = F(T \circ \lambda_i^\epsilon)(t_1, \dots, t_{p+1}) ,$$

donc

$$FT \circ \lambda_{i+1}^\epsilon = F(T \circ \lambda_i^\epsilon) .$$

Si $j < i$, on a

$$\begin{aligned}
 F\text{To}\lambda_{j+1}^\varepsilon(t_1, \dots, t_{p+1}) &= FT(t_1, \dots, t_j, \varepsilon, t_{j+1}, \dots, t_{p+1}) = \\
 &= FT'(t_1, \dots, t_j, \varepsilon, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_{p+1}) = \\
 &= FT' \circ \lambda_{j+1}^\varepsilon(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_{p+1}) = \\
 &= F(\text{To}\lambda_i^0 \circ \lambda_j^\varepsilon)(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_{p+1}) = \\
 &= F(\text{To}\lambda_j^\varepsilon \circ \lambda_{i-1}^0)(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_{p+1}) = \\
 &= F(\text{To}\lambda_j^\varepsilon) \circ \lambda_i^0(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_{p+1}) = \\
 &= F(\text{To}\lambda_j^\varepsilon)(t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_{p+1}) = \\
 &= F(\text{To}\lambda_j^\varepsilon)(t_1, \dots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \dots, t_{p+1})
 \end{aligned}$$

($\text{To}\lambda_j^\varepsilon$ est $(i-1)$ -dégénéré, ce qui entraîne que $F(\text{To}\lambda_j^\varepsilon)$ est i -dégénéré), donc $F\text{To}\lambda_{j+1}^\varepsilon = F(\text{To}\lambda_j^\varepsilon)$.

Si $j > i$, on a

$$\begin{aligned}
 F\text{To}\lambda_{j+1}^\varepsilon(t_1, \dots, t_{p+1}) &= FT(t_1, \dots, t_j, \varepsilon, t_{j+1}, \dots, t_{p+1}) = \\
 &= FT'(t_1, \dots, t_i, t_{i+2}, \dots, t_j, \varepsilon, t_{j+1}, \dots, t_{p+1}) = \\
 &= FT' \circ \lambda_j^\varepsilon(t_1, \dots, t_i, t_{i+2}, \dots, t_{p+1}) = \\
 &= F(\text{To}\lambda_i^0 \circ \lambda_{j-1}^\varepsilon)(t_1, \dots, t_i, t_{i+2}, \dots, t_{p+1}) = \\
 &= F(\text{To}\lambda_j^\varepsilon \circ \lambda_i^0)(t_1, \dots, t_i, t_{i+2}, \dots, t_{p+1}) = \\
 &= F(\text{To}\lambda_j^\varepsilon) \circ \lambda_{i+1}^0(t_1, \dots, t_i, t_{i+2}, \dots, t_{p+1}) = \\
 &= F(\text{To}\lambda_j^\varepsilon)(t_1, \dots, t_i, 0, t_{i+2}, \dots, t_{p+1}) = \\
 &= F(\text{To}\lambda_j^\varepsilon)(t_1, \dots, t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_{p+1})
 \end{aligned}$$

($\text{To}\lambda_j^\varepsilon$ est i -dégénéré, ce qui entraîne que $F(\text{To}\lambda_j^\varepsilon)$ est $(i+1)$ -dégénéré), donc $F\text{To}\lambda_{j+1}^\varepsilon = F(\text{To}\lambda_j^\varepsilon)$.

b) Nous supposons maintenant T non dégénéré. Si $T \in C_{r+1}$,

on a

$$FT: I^{p+2} \rightarrow X, \quad FT(t, t_1, \dots, t_{p+1}) = T(t_1, \dots, t_{p+1}) ;$$

toutes les propriétés requises sont automatiquement vérifiées. Si $T \notin C_{p+1}$, on peut considérer

$$\tilde{T}: I \times I^{p+1} \cup \{0\} \times I^{p+1} \rightarrow X,$$

$$\tilde{T}(t, x_1, \dots, x_{i-1}, \varepsilon, x_{i+1}, \dots, x_{p+1}) = F(T \circ \lambda_i^\varepsilon)(t, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{p+1}),$$

$$\tilde{T}(0, x) = T(x) ;$$

on vérifie facilement les conditions de compatibilité de ces expressions, ce qui montre que $\tilde{T}$ est bien définie et par suite continue. Si $p+1 \leq n$, tenant compte de 9.18 si $p = 0$, ou de 9.19 si $p > 0$, il existe

$$FT: I^{p+2} \rightarrow X$$

prolongeant $\tilde{T}$ et avec

$$FT(\{1\} \times I^{p+1}) \subset A \quad \text{et} \quad FT(\{1\} \times I_{\frac{1}{2}}^{p+1}) \subset \{x_0\}.$$

Si $p+1 > n$, on peut prolonger $\tilde{T}$ en $FT: I^{p+2} \rightarrow X$ sans aucune autre condition (compte tenu de 6.5). Dans les deux cas FT obéit aux conditions requises.

9.21 Proposition. Soit (X, A, x_0) une paire quasi-topologique pointée, avec X et A connexes par arcs, et soit $n \geq 0$ tel que, pour tout $1 \leq i \leq n$, on ait $\pi_i(\hat{X}, \hat{A}) = 0$. Soit $\hat{C}_p(X, A)$ le sous-module de $C(X, A)$ engendré par les cubes $T: I^n \rightarrow X$ qui appliquent le n -squelette de I^n dans A . Alors $\hat{C}(X, A)$ est un sous-module gradué différentiel de $C(X, A)$ et l'inclusion

$$\lambda: \hat{C}(X, A) \rightarrow C(X, A)$$

induit des isomorphismes pour les groupes d'homologie.

Démonstration: Il est immédiat que $\hat{C}(X, A)$ est un sous-module gradué différentiel de $C(X, A)$. Compte tenu du lemme antérieur, il nous suffit de montrer que l'inclusion $\tilde{C}(X, A) \rightarrow \hat{C}(X, A)$ induit des isomorphismes pour les groupes d'homologie. Comme pour le lemme antérieur il nous suffit de voir que l'inclusion $\lambda': \tilde{C}(X) \rightarrow \hat{C}(X)$ induit des isomorphismes pour les groupes d'homologie, et on le fait de la même façon, employant le lemme 9.16 avec C_p la classe du lemme antérieur et C'_p

la classe des cubes qui appliquent le n -squelette de I^p dans A ; la construction $S \mapsto FS$ est analogue en prenant les précautions suivantes : Dans 1) on a $a \in A$ et l'on construit alors $FS: I^1 \rightarrow A$ (A est aussi connexe par arcs). Dans 2) b), dans le cas où $T \notin C_{p+1}$ et si $p+1 \leq n$, on prend le prolongement FT de $\tilde{T}$ à valeurs dans A (ce qui est possible puisque $\tilde{T}$ prend ses valeurs dans A et l'on a $\pi_{p+1}(\hat{A}, \hat{A}) = 0$).

La proposition suivante est déjà une partie du théorème d'Hurewicz.

9.22 Proposition. Soit (X, x_0) un espace quasi-topologique pointé connexe par arcs. Alors le morphisme de groupes défini par

$$h_1 \circ i_1 : \pi_1(\hat{X}) \rightarrow H_1(X, \{x_0\})$$

est surjectif et il admet comme noyau le sous-groupe des commutateurs de $\pi_1(\hat{X})$.

Démonstration: On a déjà vu que $h_1 \circ i_1 : \pi_1(\hat{X}) \rightarrow H_1(X, \{x_0\})$ applique $|\alpha| \in \pi_1(\hat{X})$ ($\alpha: S_1 \rightarrow \hat{X}$) sur $|\alpha \circ \theta_1| \in H_1(X, \{x_0\})$ (voir la démonstration de 9.13). D'autre part, la proposition 9.21 (avec $n = 0$ et $A = \{x_0\}$) montre que, si $\hat{C}(X, \{x_0\})$ est le sous-module gradué différentiel de $C(X, \{x_0\})$ engendré par les cubes avec les sommets en x_0 , en notant

$$\lambda: \hat{C}(X, \{x_0\}) \rightarrow C(X, \{x_0\})$$

l'inclusion, $H(\lambda)$ est un isomorphisme. Il nous suffit donc de montrer que le morphisme défini par

$$H_1(\lambda)^{-1} \circ (h_1 \circ i_1) : \pi_1(\hat{X}) \rightarrow \hat{H}_1(X, \{x_0\})$$

(que l'on représentera par ϕ) est surjectif et a comme noyau le sous-groupe des commutateurs, ϕ associant $|\alpha \circ \theta_1|$ à $|\alpha|$ (car $\alpha \circ \theta_1$ applique les sommets sur x_0). Comme $\hat{H}_1(X, \{x_0\})$ est commutatif, ϕ définit par passage au quotient un morphisme

$$\hat{\pi}_1(\hat{X}) \rightarrow \hat{H}_1(X, \{x_0\})$$

où C est le sous-groupe des commutateurs, et la proposition sera démontrée si l'on voit que $\hat{\phi}$ est un isomorphisme.

Pour chaque cube singulier de dimension 1, $T: I \rightarrow X$ avec

$$T(0) = T(1) = x_0,$$

soit $\alpha_T: S_1 \rightarrow \hat{X}$ l'application continue pointée définie par $\alpha_T \circ \theta_1 = T$; puisque le groupe

$$\frac{\pi_1(\hat{X})}{C}$$

est abélien, il existe un morphisme

$$\psi: \hat{C}_1(X, \{x_0\}) \rightarrow \frac{\pi_1(\hat{X})}{C}$$

qui applique T sur $||\alpha_T||_{\text{mod } C}$ (si $T(I) \subset \{x_0\}$, alors $|\alpha_T| = 0 \in \pi_1(\hat{X})$). On va voir que, si

$$d: \hat{C}_2(X, \{x_0\}) \rightarrow \hat{C}_1(X, \{x_0\})$$

est la dérivation, alors $\psi \circ d = 0$. Or soit $T: I^2 \rightarrow X$ avec les sommets en x_0 . On voit que

$$dT = T_1 - T_2 + T_3 - T_4 ,$$

avec

$$T_1 = T \circ \lambda_1^1, \quad T_2 = T \circ \lambda_1^0, \quad T_3 = T \circ \lambda_2^0, \quad T_4 = T \circ \lambda_2^1 .$$

On a

$$\psi(dT) = \psi(T_3) - [\psi(T_2) + \psi(T_4)] + \psi(T_1) =$$

$$= ||\alpha_{T_3}||_C - (||\alpha_{T_2}|| \cdot |\alpha_{T_4}| \cdot e) + ||\alpha_{T_1}||_C = ||\alpha_{T_3}|| \cdot |\alpha_{T_2} \perp \alpha_{T_4}|^{-1} \cdot |\alpha_{T_1}||_C$$

(où $\alpha_{T_2} \perp \alpha_{T_4}: S_1 \rightarrow \hat{X}$ est défini par

$$\theta_1(t) \rightsquigarrow \begin{cases} \alpha_{T_2}(\theta_1(2t)), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha_{T_4}(\theta_1(2t-1)), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} ;$$

pour voir que $\psi(dT) = 0$, il suffit de voir que $|\alpha_{T_3}| \cdot |\alpha_{T_2} \perp \alpha_{T_4}|^{-1} \cdot |\alpha_{T_1}|$ est un commutateur, ou encore que $\alpha_{T_2} \perp \alpha_{T_4}$ est homotope à $\alpha_{T_3} \perp \alpha_{T_1}$.

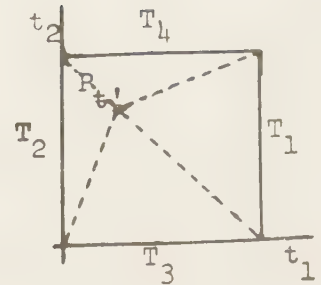
Or soit, pour chaque $t' \in [0,1]$, $P_{t'} = (t', 1-t')$. Définissons

$$H: S_1 \times I \rightarrow X, \quad H(\theta_1(t), t') = \begin{cases} T(2tP_{t'}), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ T(P_{t'} + (2t-1)((1,1)-P_{t'})), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} .$$

Alors $H(*, t') = x_0$,

$$H(\theta_1(t), 0) = \alpha_{T_2} \perp \alpha_{T_4}(\theta_1(t)) , \quad H(\theta_1(t), 1) = \alpha_{T_3} \perp \alpha_{T_1}(\theta_1(t)) ,$$

ce qui construit une telle homotopie. Par passage au quotient (car



$\hat{C}_0(X, \{x_0\}) = 0$), ψ donne

$$\hat{\psi}: \hat{H}_1(X, \{x_0\}) \rightarrow \frac{\pi_1(\hat{X})}{C}$$

et l'on voit tout de suite que $\hat{\psi}$ est un inverse de $\hat{\phi}$; donc celui-ci est un isomorphisme.

Pour démontrer le théorème d'Hurewicz, on aura besoin du lemme suivant:

9.23 Lemme. Soit (X, A) une paire quasi-topologique, soit $n \geq 1$. Soient $\hat{C}_p(X, A)$ et $\hat{\tilde{C}}_p(X, A)$ les sous-modules de $C_p(X, A)$ engendrés respectivement par les cubes $T: I^p \rightarrow X$ qui appliquent le n -squelette dans A , et par les cubes $T: I^p \rightarrow X$ qui appliquent le n -squelette dans A et vérifient

$$T(0, t_2, \dots, t_p) \in A, \quad T(1, t_2, \dots, t_p) \in A$$

(on pose $\hat{C}_0(X, A) = 0$). Alors $\hat{C}(X, A)$ et $\hat{\tilde{C}}(X, A)$ sont des sous-modules gradués différentiels de $C(X, A)$ et, si

$$i: \hat{\tilde{C}}(X, A) \rightarrow \hat{C}(X, A)$$

est l'inclusion, alors, $\forall i \leq n+1$

$$H_i(i): \hat{H}_i(X, A) \rightarrow \hat{H}_i(X, A)$$

est un isomorphisme.

Démonstration: On voit facilement qu'on a des sous-modules gradués différentiels. Pour $i \leq n$,

$$\hat{C}_i(X, A) = \hat{\tilde{C}}_i(X, A) = 0$$

et

$$\hat{C}_{n+1}(X, A) = \hat{\tilde{C}}_{n+1}(X, A),$$

d'où résulte déjà que l'assertion du lemme est triviale pour $i \leq n$.

Si $\tilde{C}(X, A)$ est le module gradué différentiel quotient

$$\tilde{C}(X, A) = \frac{\hat{\tilde{C}}(X, A)}{\hat{C}(X, A)},$$

on obtient une suite exacte d'homologie

$$\hat{H}_{n+2}(X, A) \rightarrow \tilde{H}_{n+2}(X, A) \rightarrow \hat{H}_{n+1}(X, A) \xrightarrow{H_n(i)} \hat{H}_{n+1}(X, A) \rightarrow \tilde{H}_{n+1}(X, A).$$

Comme $\tilde{C}_{n+1}(X, A) = 0$, $\tilde{H}_{n+1}(X, A) = 0$, $H_{n+1}(i)$ est surjective et tout

revient à montrer que $H_{n+1}(1)$ est injective, c'est-à-dire que

$$\tilde{H}_{n+2}(X,A) \rightarrow \hat{H}_{n+1}(X,A)$$

est le morphisme nul, ou encore que

$$\hat{H}_{n+2}(X,A) \rightarrow \tilde{H}_{n+2}(X,A)$$

est surjective.

Si l'on tient compte du fait que tout élément de $\tilde{C}_{n+2}(X,A)$ est un cycle ($\tilde{C}_{n+1}(X,A) = 0$), il suffit de voir que, pour chaque $T: I^{n+2} \rightarrow X$ (appliquant le n -squelette dans A), $|T| \in \tilde{H}_{n+2}(X,A)$ est l'image d'un élément de $\hat{H}_{n+2}(X,A)$.

(I) Soit donc $T: I^{n+2} \rightarrow X$ qui applique le n -squelette de I^{n+2} dans A . On va définir $\tilde{T}: I^{n+3} \rightarrow X$ appliquant le n -squelette dans A par prolongements successifs:

$$a) \quad \tilde{T}(t_1, \dots, t_{n+2}, 0) =$$

$$= T(t_1, \dots, t_{n+2}).$$

$$b) \quad \text{Pour } i \neq 1, 3, n+3, \quad \varepsilon \in \{0, 1\},$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}(t_1, \dots, t_{i-1}, \varepsilon, t_{i+1}, \dots, t_{n+3}) &= \\ &= T(t_1, \dots, t_{i-1}, \varepsilon, t_{i+1}, \dots, t_{n+2}). \end{aligned}$$

$$c) \quad \tilde{T}(0, t_2, 0, t_4, \dots, t_{n+3}) =$$

$$= T(0, t_2, 0, t_4, \dots, t_{n+2}) \quad (\varepsilon \in A);$$

d'après 6.5, on définit

$$\tilde{T}(0, t_2, t_3, \dots, t_{n+2}, 1) \in A;$$

à nouveau d'après 6.5, on définit

$$\tilde{T}(0, t_2, \dots, t_{n+3}) \in X.$$

$$d) \quad \tilde{T}(1, t_2, 1, t_4, \dots, t_{n+3}) = T(1, t_2, 1, t_4, \dots, t_{n+2}) \quad (\varepsilon \in A);$$

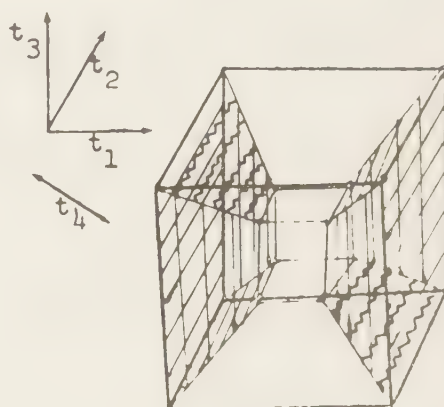
d'après 6.5, on définit

$$T(1, t_2, t_3, \dots, t_{n+2}, 1) \in A$$

et, à nouveau en utilisant 6.5, on définit

$$\tilde{T}(1, t_2, t_3, \dots, t_{n+3}) \in X.$$

e) D'après 6.5 on définit



$$\tilde{T}(t_1, \varepsilon, t_3, \dots, t_{n+3}) \in X.$$

f) Enfin, et encore en vertu de 6.5, on définit

$$\tilde{T}(t_1, \dots, t_{n+3}) \in X.$$

On voit que $\tilde{T} \circ \lambda_{n+3}^0 = T$; $\tilde{T} \circ \lambda_{n+3}^1 \circ \lambda_1^\varepsilon$ prend ses valeurs dans A , donc $\tilde{T} \circ \lambda_{n+3}^1 \in \hat{C}_{n+2}(X, A)$; pour $i \neq 3, n+3$, $\tilde{T} \circ \lambda_i^\varepsilon \circ \lambda_1^\varepsilon$ prend ses valeurs dans A , de sorte que $\tilde{T} \circ \lambda_i^\varepsilon \in \hat{C}_{n+2}(X, A)$. Dans $\tilde{C}_{n+2}(X, A)$ on a

$$d\tilde{T} = (-1)^{n+3} \tilde{T} \circ \lambda_3^1 - \tilde{T} \circ \lambda_3^0$$

et par suite, dans $\tilde{H}_{n+2}(X, A)$,

$$|T| = (-1)^n |\tilde{T} \circ \lambda_3^1| + (-1)^{n+1} |\tilde{T} \circ \lambda_3^0|;$$

ainsi il suffit de prouver que $|S|$ est dans l'image de

$$\hat{H}_{n+2}(X, A) \rightarrow \tilde{H}_{n+2}(X, A)$$

quand le cube S est d'un des types 1 ou 2 :

Type 1. $\text{So } \lambda_i^\varepsilon$ prend ses valeurs dans A sauf pour " $i = n+2$ " et " $i = 1, \varepsilon = 1$ " (c'est ce qui arrive pour $T \circ \lambda_3^0$).

Type 2. $\text{So } \lambda_i^\varepsilon$ prend ses valeurs dans A sauf pour " $i = n+2$ " et " $i = 1, \varepsilon = 0$ " (c'est ce qui arrive pour $T \circ \lambda_3^1$).

(II) Soit $T: I^{n+2} \rightarrow X$ du type 2. On va définir $T: \tilde{I}^{n+3} \rightarrow X$, qui applique le n -squelette dans A , par prolongements successifs:

$$a) \quad \tilde{T}(t_1, t_2, \dots, t_{n+2}, 0) = T(t_1, \dots, t_{n+2}).$$

b)

$$\tilde{T}(1, 1, t_3, \dots, 1, t_{n+3}) = T(1, 1, t_3, \dots, 1) \quad (\varepsilon \in A),$$

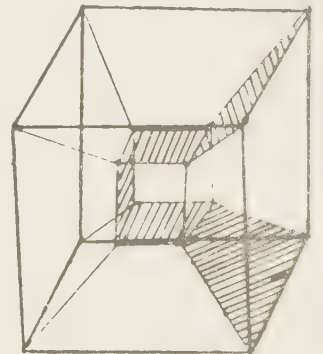
$$\tilde{T}(1, t_2, t_3, \dots, 1, t_{n+3}) =$$

$$= \begin{cases} \tilde{T}(1, t_2 + t_{n+3}, t_3, \dots, 1, 0) & , \quad t_2 + t_{n+3} \leq 1 \\ \tilde{T}(1, 1, t_3, \dots, 1, t_2 + t_{n+3} - 1) & , \quad t_2 + t_{n+3} > 1 \quad (\varepsilon \in A), \end{cases}$$

$$\tilde{T}(t_1, t_2, t_3, \dots, 1, t_{n+3}) =$$

$$= \begin{cases} \tilde{T}(t_1 + t_{n+3}, t_2, \dots, 1, 0) & , \quad t_1 + t_{n+3} \leq 1 \\ \tilde{T}(1, t_2, \dots, 1, t_1 + t_{n+3} - 1) & , \quad t_1 + t_{n+3} > 1. \end{cases}$$

$$c) \quad \tilde{T}(1, 1, t_3, \dots, 0, t_{n+3}) = T(1, 1, t_3, \dots, 0) \quad (\varepsilon \in A),$$



/// $\notin A$

$$\tilde{T}(1, t_2, t_3, \dots, 0, t_{n+3}) = \begin{cases} \tilde{T}(1, t_2 + t_{n+3}, t_3, \dots, 0, 0) & , \quad t_2 + t_{n+3} \leq 1 \\ \tilde{T}(1, 1, t_3, \dots, 0, t_2 + t_{n+3} - 1) & , \quad t_2 + t_{n+3} \geq 1 \end{cases} \quad (\in A),$$

$$\tilde{T}(t_1, t_2, t_3, \dots, 0, t_{n+3}) = \begin{cases} \tilde{T}(t_1 + t_{n+3}, t_2, \dots, 0, 0) & , \quad t_1 + t_{n+3} \leq 1 \\ \tilde{T}(1, t_2, \dots, 0, t_1 + t_{n+3} - 1) & , \quad t_1 + t_{n+3} \geq 1 \end{cases}.$$

d) $\tilde{T}(0, t_2, \dots, t_{n+3}) = T(t_{n+3}, t_2, \dots, t_{n+2})$

(voir que c'est compatible avec b) et c)).

e) $\tilde{T}(1, t_2, \dots, t_{n+3})$ est déjà connu quand $t_{n+3} = 0$ ($\in A$) ou $t_{n+2} \in \{0, 1\}$ ($\in A$); donc, $I \times \bar{I} \cup \{0\} \times I$ étant un rétracte de I^2 , $(I \times \bar{I} \cup \{0\} \times I) \times I^n$ est un rétracte de $I^2 \times I^n$ et on peut définir

$$\tilde{T}(1, t_2, \dots, t_{n+3}) \in A.$$

f) Comme dans e), on peut définir

$$\tilde{T}(t_1, \varepsilon, t_3, \dots, t_{n+3}) \in A,$$

car ses valeurs sont déjà connues pour $t_{n+3} = 0$ ($\in A$), pour $t_1 \in \{0, 1\}$ ($\in A$) et pour $t_{n+2} \in \{0, 1\}$ ($\in A$).

Maintenant successivement, par récurrence, on définit, pour $3 \leq i \leq n+1$,

$$\tilde{T}(t_1, \dots, t_{i-1}, \varepsilon, t_{i+1}, \dots, t_{n+3}) \in A.$$

g) Enfin, en appliquant 6.5 on peut définir

$$\tilde{T}(t_1, \dots, t_{n+3}) \in X.$$

On voit que $\tilde{T}o\lambda_{n+3}^0 = T$; $\tilde{T}o\lambda_1^0 o\lambda_1^\varepsilon$ prend ses valeurs dans A , donc $\tilde{T}o\lambda_1^0 \in \hat{C}_{n+2}(X, A)$; $\tilde{T}o\lambda_1^1$ prend ses valeurs dans A donc $\tilde{T}o\lambda_1^1 = 0$ dans $\hat{C}_{n+2}(X, A)$ et il en est de même pour chaque $\tilde{T}o\lambda_i^\varepsilon$, $i \neq 1, n+2, n+3$; $\tilde{T}o\lambda_{n+3}^1 o\lambda_1^\varepsilon$ prend ses valeurs dans A , d'où

$$\tilde{T}o\lambda_{n+3}^1 \in \hat{C}_{n+2}(X, A).$$

Il en résulte que, dans $\hat{C}_{n+2}(X, A)$,

$$d\tilde{T} = (-1)^{n+3} T + (-1)^{n+2} \tilde{T}o\lambda_{n+2}^0 - (-1)^{n+2} \tilde{T}o\lambda_{n+2}^1,$$

donc, dans $\tilde{H}_{n+2}(X, A)$,

$$|T| = |\tilde{T}o\lambda_{n+2}^0| - |\tilde{T}o\lambda_{n+2}^1|.$$

Si $T':I^{n+2} \rightarrow X$ est du type 1, on peut considérer $T:I^{n+2} \rightarrow X$,

$$T(t_1, \dots, t_{n+2}) = T'(1-t_1, \dots, 1-t_{n+2}),$$

T étant du type 2, on peut considérer $\tilde{T}:I^{n+3} \rightarrow X$ et définir

$$\tilde{T}:I^{n+3} \rightarrow X, \quad \tilde{T}'(t_1, \dots, t_{n+3}) = \tilde{T}(1-t_1, \dots, 1-t_{n+3}).$$

Alors $\tilde{T}' \circ \lambda_{n+3}^1 = T'$, $\tilde{T}' \circ \lambda_1^1 \in \hat{C}_{n+2}(X, A)$, $\tilde{T}' \circ \lambda_1^0$ et $\tilde{T}' \circ \lambda_i^\varepsilon$ ($i \neq 1, n+2, n+3$)

sont nuls dans $\hat{C}_{n+2}(X, A)$, $\tilde{T}' \circ \lambda_{n+2}^0 \in \hat{C}_{n+2}(X, A)$ et, dans $\tilde{C}_{n+2}(X, A)$,

$$d\tilde{T}' = -(-1)^{n+3}T' + (-1)^{n+2}\tilde{T}' \circ \lambda_{n+2}^0 - (-1)^{n+2}\tilde{T}' \circ \lambda_{n+2}^1;$$

par suite, dans $\tilde{H}_{n+2}(X, A)$,

$$|T'| = |\tilde{T}' \circ \lambda_{n+2}^1| - |\tilde{T}' \circ \lambda_{n+2}^0|.$$

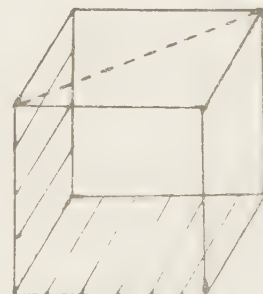
Il nous suffit maintenant de montrer que S est dans l'image de

$$\hat{H}_{n+2}(X, A) \rightarrow \tilde{H}_{n+2}(X, A)$$

quand S est de l'un des types 3 ou 4 :

Type 3. $S \circ \lambda_i^\varepsilon$ prend ses valeurs dans A sauf pour " $i = 1, \varepsilon = 0$ " et " $i = n+2, \varepsilon = 0$ ", et on a

$$S(t_1, t_2, \dots, t_{n+1}, 1) = \begin{cases} S(t_1+t_2, 0, t_3, \dots, 1) & , \quad t_1+t_2 \leq 1 \\ S(1, t_1+t_2-1, t_3, \dots, 1) & , \quad t_1+t_2 > 1 \end{cases}$$



Type 3

(c'est une condition de symétrie par rapport à un certain hyperplan de la face $n+2 = 1$). C'est ce qui arrive pour $\tilde{T}' \circ \lambda_{n+2}^0$ et $\tilde{T}' \circ \lambda_{n+2}^1$ si T est du type 2.

Type 4. $S':I^{n+2} \rightarrow X$, défini par

$$S'(t_1, \dots, t_{n+2}) = S(1-t_1, \dots, 1-t_{n+2}),$$

est du type 3. Ceci arrive en particulier quand S est $\tilde{T}' \circ \lambda_{n+2}^0$ ou $\tilde{T}' \circ \lambda_{n+2}^1$, pour T du type 1.

(III) Soit $T:I^{n+2} \rightarrow X$ du type 3; on va définir $\tilde{T}:I^{n+3} \rightarrow X$ qui applique le n -squelette dans A , par prolongements successifs:

a)
$$\tilde{T}(t_1, \dots, t_{n+2}, 0) = T(t_1, \dots, t_{n+2}).$$

b) Pour $i \neq 1, 2, n+2, n+3$,

$$\begin{aligned} \tilde{T}(t_1, \dots, t_{i-1}, \varepsilon, t_{i+1}, \dots, t_{n+3}) &= \\ &= T(t_1, \dots, t_{i-1}, \varepsilon, t_{i+1}, \dots, t_{n+2}) . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \tilde{T}(t_1, t_2, \dots, t_{n+1}, 0, t_{n+3}) &= \\ &= T(t_1, t_2, \dots, t_{n+1}, 0) . \end{aligned}$$

$$\text{d) } \tilde{T}(0, \varepsilon, t_3, \dots, t_{n+3}) = T(0, \varepsilon, t_3, \dots, t_{n+2}) ;$$

d'après 6.5 , on définit

$$\tilde{T}(0, t_2, t_3, \dots, t_{n+2}, 1) \in A ,$$

et, à nouveau à l'aide de 6.5 , on définit

$$\tilde{T}(0, t_2, \dots, t_{n+3}) \in X .$$

$$\text{e) } \tilde{T}(1, t_2, \dots, t_{n+3}) = T(1, t_2, \dots, t_{n+2}) \quad (\in A) .$$

$$\text{f) } \tilde{T}(t_1, t_2, \dots, t_{n+1}, 1, t_{n+3}) = \begin{cases} \tilde{T}(0, t_1+t_2, t_3, \dots, t_{n+1}, 1, t_{n+3}) & , \quad t_1+t_2 \leq 1 \\ \tilde{T}(1, t_1+t_2-1, t_3, \dots, t_{n+1}, 1, t_{n+3}) & , \quad t_1+t_2 \geq 1 \end{cases}$$

(vérifier la compatibilité avec les alinéas précédents , spécialement a) et b)).

$$\text{g) } \text{D'après 6.5 on définit } \tilde{T}(t_1, \varepsilon, t_3, \dots, t_{n+3}) \in X .$$

$$\text{h) } \text{Encore en utilisant 6.5 on définit } \tilde{T}(t_1, t_2, \dots, t_{n+3}) \in X .$$

On voit que $\tilde{T} \circ \lambda_{n+3}^0 = T$; pour $i \neq 1, 2, n+2, n+3$, $\tilde{T} \circ \lambda_i^\varepsilon$ prend ses valeurs dans A , donc est nul dans $\hat{C}_{n+2}(X, A)$; $\tilde{T} \circ \lambda_{n+3}^1 \circ \lambda_1^\varepsilon$ prend ses valeurs dans A , d'où $\tilde{T} \circ \lambda_{n+3}^1 \in \hat{C}_{n+2}(X, A)$; $\tilde{T} \circ \lambda_2^\varepsilon \circ \lambda_1^\varepsilon$ et $\tilde{T} \circ \lambda_1^0 \circ \lambda_1^\varepsilon$ prennent leurs valeurs dans A , d'où $\tilde{T} \circ \lambda_2^\varepsilon, \tilde{T} \circ \lambda_1^0 \in \hat{C}_{n+2}(X, A)$; $\tilde{T} \circ \lambda_1^1$ prend ses valeurs dans A , donc $\tilde{T} \circ \lambda_1^1 = 0$ dans $\hat{C}_{n+2}(X, A)$; $\tilde{T} \circ \lambda_{n+2}^0 \circ \lambda_1^\varepsilon$ prenant ses valeurs dans A , $\tilde{T} \circ \lambda_{n+2}^0 \in \hat{C}_{n+2}(X, A)$.

On obtient ainsi, dans $\hat{C}_{n+2}(X, A)$,

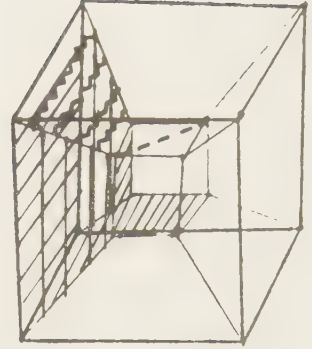
$$d\tilde{T} = (-1)^{n+3} T - (-1)^{n+2} \tilde{T} \circ \lambda_{n+2}^1 ,$$

et par suite dans $\tilde{H}_{n+2}(X, A)$,

$$|T| = -|\tilde{T} \circ \lambda_{n+2}^1| .$$

Mais, dans $\hat{C}_{n+2}(X, A)$, $d(\tilde{T} \circ \lambda_{n+2}^1) = 0$ (car

$$\tilde{T} \circ \lambda_{n+2}^1 \circ \lambda_1^0 = \tilde{T} \circ \lambda_{n+2}^1 \circ \lambda_2^0$$



et tous les autres $T \circ \lambda_{n+2}^1 \circ \lambda_i^\varepsilon$ sont nuls dans $\hat{C}_{n+1}(X, A)$ puisqu'ils prennent leurs valeurs dans A), et $\tilde{T} \circ \lambda_{n+2}^1$ est donc un cycle dans $\hat{C}_{n+2}(X, A)$, ce qui montre que $|T|$ est dans l'image de

$$\hat{H}_{n+2}(X, A) \rightarrow \tilde{H}_{n+2}(X, A).$$

Si $T': I^{n+2} \rightarrow X$ est du type 4, on peut considérer $T: I^{n+2} \rightarrow X$,

$$T(t_1, \dots, t_{n+2}) = T'(1-t_1, \dots, 1-t_{n+2}).$$

T étant alors du type 3, on considère le $\tilde{T}: I^{n+3} \rightarrow X$ correspondant et on définit $\tilde{T}': I^{n+3} \rightarrow X$,

$$\tilde{T}'(t_1, \dots, t_{n+3}) = \tilde{T}(1-t_1, \dots, 1-t_{n+3});$$

on voit comme auparavant que, dans $\tilde{H}_{n+2}(X, A)$,

$$|T'| = -|\tilde{T}' \circ \lambda_{n+2}^0|;$$

$\tilde{T}' \circ \lambda_{n+2}^0$ étant un cycle dans $\hat{C}_{n+2}(X, A)$ ($\tilde{T}' \circ \lambda_{n+2}^0 \circ \lambda_1^1 = \tilde{T}' \circ \lambda_{n+2}^0 \circ \lambda_1^1$ et les autres $\tilde{T}' \circ \lambda_{n+2}^0 \circ \lambda_i^\varepsilon$ sont nuls dans $\hat{C}_{n+1}(X, A)$), $|T'|$ est dans l'image de

$$\hat{H}_{n+2}(X, A) \rightarrow \tilde{H}_{n+2}(X, A).$$

9.24 Définition. Un espace quasi-topologique pointé (X, x_0) est dit *simplement connexe* si $\pi_0(\hat{X}) = \pi_1(\hat{X}) = 0$.

9.25 Proposition. Soit (X, A, x_0) une paire quasi-topologique pointée, soit $n \geq 1$ et supposons X connexe par arcs, $\hat{A}$ simplement connexe et, pour $1 \leq i \leq n$, $\pi_i(\hat{X}, \hat{A}) = 0$. Alors, pour $i \leq n$,

$$\sigma_i: H_i(E(X, A, A), E(A, A, A)) \rightarrow H_{i+1}(X, A)$$

est un isomorphisme.

Démonstration: $\pi_i(\hat{E}(X, A, A), \hat{E}(A, A, A))$ étant isomorphe à $\pi_{i+1}(\hat{X}, \hat{A})$,

$$\pi_i(\hat{E}(X, A, A), \hat{E}(A, A, A)) = 0, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

D'après 7.25, $\hat{E}(A, A, A)$ est isomorphe dans $\frac{\partial T^*}{\sim}$ à $\hat{A}$, donc $\pi_0(\hat{E}(A, A, A)) = 0$, c'est-à-dire $E(A, A, A)$ est connexe par arcs. D'autre part, on peut considérer une fibration

$$p_0: E(X, A, A) \rightarrow A$$

dont la fibre est $E(X, x_0, A)$ et il lui est associé une suite exacte

$$\pi_0(\hat{E}(X, x_0, A)) \rightarrow \pi_0(\hat{E}(X, A, A)) \rightarrow \pi_0(\hat{A})$$

avec $\pi_0(\hat{A}) = 0$, $\pi_0(\hat{E}(X, x_0, A))$ isomorphe à $\pi_1(\hat{X}, \hat{A}) = 0$, donc $\pi_0(\hat{E}(X, A, A)) = 0$, c'est-à-dire $E(X, A, A)$ est connexe par arcs. Si

$$\hat{C}(E(X, A, A), E(A, A, A))$$

est le sous-module de $C(E(X, A, A), E(A, A, A))$ engendré par les cubes $S: I^P \rightarrow E(X, A, A)$ qui appliquent le $(n-1)$ -squelette dans $E(A, A, A)$, d'après 9.21, l'inclusion

$$\lambda: \hat{C}(E(X, A, A), E(A, A, A)) \rightarrow C(E(X, A, A), E(A, A, A))$$

induit des isomorphismes pour les groupes d'homologie. En tenant compte du lemme antérieur et de 9.21, l'inclusion

$$\lambda': \hat{\tilde{C}}(X, A) \rightarrow C(X, A)$$

est telle que $H_i(\lambda')$ est un isomorphisme pour $i \leq n+1$. Mais le morphisme gradué antidifférentiel ξ de 9.10 applique

$$\hat{C}_i(E(X, A, A), E(A, A, A))$$

isomorphiquement sur $\hat{\tilde{C}}_{i+1}(X, A)$ et l'on a donc, pour $i \leq n$, un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_i(E(X, A, A), E(A, A, A)) & \xrightarrow{\sigma_i} & H_{i+1}(X, A) \\ \uparrow H_i(\lambda) & & \uparrow H_{i+1}(\lambda') \\ \hat{H}_i(E(X, A, A), E(A, A, A)) & \xrightarrow{H_i(\xi')} & \hat{H}_{i+1}(X, A) \end{array}$$

où les colonnes sont des isomorphismes ainsi que la ligne inférieure, ce qui montre que σ_i est un isomorphisme.

9.26 Théorème (Hurewicz). Soit (X, A, x_0) une paire quasi-topologique pointée, soit $n \geq 1$ et supposons X connexe par arcs, $\hat{A}$ simplement connexe et, pour $1 \leq i \leq n$, $\pi_i(\hat{X}, \hat{A}) = 0$. Alors

$$h_i: \pi_i(\hat{X}, \hat{A}) \rightarrow H_i(X, A)$$

est bijectif pour $1 \leq i \leq n+1$.

Démonstration: Commençons par remarquer que $\hat{X}$ est aussi simplement connexe, ce qui découle de la suite exacte

$$\pi_1(\hat{A}) \rightarrow \pi_1(\hat{X}) \rightarrow \pi_1(\hat{X}, \hat{A}).$$

Alors, comme

$$h_1 \circ i_1 : \pi_1(\hat{X}) \rightarrow H_1(X, \{x_0\}) \quad \text{et} \quad h_1 \circ i_1 : \pi_1(\hat{A}) \rightarrow H_1(A, \{x_0\})$$

sont surjectifs, on voit que

$$H_1(X, \{x_0\}) = H_1(A, \{x_0\}) = 0.$$

Considérant la suite exacte

$$H_1(X, \{x_0\}) \rightarrow H_1(X, A) \rightarrow H_0(A, \{x_0\}),$$

on a (compte tenu de 8.11) $H_1(X, A) = 0$. Alors

$$h_1 : \pi_1(\hat{X}, \hat{A}) \rightarrow H_1(X, A)$$

est trivialement bijectif et il reste seulement à montrer que

$$h_{n+1} : \pi_{n+1}(\hat{X}, \hat{A}) \rightarrow H_{n+1}(X, A)$$

est bijectif.

Mais on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(\hat{E}(X, A, A), \hat{E}(A, A, A)) & \longrightarrow & \pi_{n+1}(\hat{X}, \hat{A}) \\ \downarrow h_n & & \downarrow h_{n+1} \\ H_n(E(X, A, A), E(A, A, A)) & \xrightarrow{\sigma_n} & H_{n+1}(X, A) \end{array}$$

(9.12) où les lignes sont bijectives (compte tenu de 9.25) et il suffit donc de montrer que

$$h_n : \pi_n(\hat{E}(X, A, A), \hat{E}(A, A, A)) \rightarrow H_n(E(X, A, A), E(A, A, A))$$

est bijectif.

a) Supposons $n > 1$ et le théorème démontré pour $n-1$; puisque $E(X, A, A)$ est connexe par arcs (comme dans la démonstration de la proposition antérieure), que $\hat{E}(A, A, A)$ est simplement connexe (isomorphe à $\hat{A}$ dans $\frac{OT^*}{\sim}$) et que $\pi_1(\hat{E}(X, A, A), \hat{E}(A, A, A)) = 0$ pour $1 \leq i \leq n-1$ on peut simplement appliquer l'hypothèse d'induction à la paire $(\hat{E}(X, A, A), \hat{E}(A, A, A))$ pour voir que h_n définit un isomorphisme.

b) Il nous suffit donc d'étudier le cas $n = 1$. On a une suite fortement exacte

$$\pi_1(\hat{E}(A, A, A)) \rightarrow \pi_1(\hat{E}(X, A, A)) \rightarrow \pi_1(\hat{E}(X, A, A), \hat{E}(A, A, A)) \rightarrow \pi_0(\hat{E}(A, A, A));$$

donc, $\hat{E}(A, A, A)$ étant simplement connexe,

$$\pi_1(\hat{E}(X, A, A)) \rightarrow \pi_1(\hat{E}(X, A, A), \hat{E}(A, A, A))$$

est bijectif. Il en résulte que

$$\pi_1(\hat{E}(X, A, A), \{\hat{x}_0\}) \rightarrow \pi_1(\hat{E}(X, A, A), \hat{E}(A, A, A))$$

est aussi bijectif et l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\hat{E}(X, A, A), \{\hat{x}_0\}) & \rightarrow & \pi_1(\hat{E}(X, A, A), \hat{E}(A, A, A)) \\ \downarrow h_1 & & \downarrow h_1 \\ H_1(E(X, A, A), \{\hat{x}_0\}) & \rightarrow & H_1(E(X, A, A), E(A, A, A)) \end{array}$$

où la ligne inférieure est un isomorphisme, ce qui découle de la suite exacte

$$H_1(E(A, A, A), \{\hat{x}_0\}) \rightarrow H_1(E(X, A, A), \{\hat{x}_0\}) \rightarrow H_1(E(X, A, A), E(A, A, A)) \rightarrow H_0(E(A, A, A), \{\hat{x}_0\})$$

($\hat{E}(A, A, A)$ est isomorphe à $\hat{A}$ dans $\frac{OT^*}{\sim}$) ; il nous suffit donc de montrer que le h_1 de gauche est bijectif, ou encore que

$$h_1 \circ i_1 : \pi_1(\hat{E}(X, A, A)) \rightarrow H_1(E(X, A, A), \{\hat{x}_0\})$$

définit un isomorphisme; ceci sera vrai, compte tenu de 2.22, si

$\pi_1(\hat{E}(X, A, A))$ est commutatif. Or, considérant la fibration

$$p_0 : E(X, A, A) \rightarrow A,$$

de fibre $E(X, x_0, A)$, on obtient une suite exacte

$$\pi_1(\hat{E}(X, x_0, A)) \rightarrow \pi_1(\hat{E}(X, A, A)) \rightarrow \pi_1(\hat{A}) = 0;$$

puisque l'on a une suite exacte

$$\pi_2(\hat{X}) \rightarrow \pi_2(\hat{X}, \hat{A}) \rightarrow \pi_1(\hat{A}) = 0,$$

où $\pi_2(\hat{X})$ est commutatif, $\pi_2(\hat{X}, \hat{A})$ est commutatif et par suite

$\pi_1(\hat{E}(X, x_0, A))$ l'est aussi, d'où finalement la commutativité de

$\pi_1(\hat{E}(X, A, A))$.

10. Les quasi-CW-complexes

Si, dans la définition des CW-complexes, on prend les quasi-topologies finales à la place des topologies finales, on retrouve une autre notion, celle de quasi-CW-complexe. La topologie associée à la quasi-topologie d'un quasi-CW-complexe est la topologie d'un CW-complexe. On montre que, pour les quasi-CW-complexes finis, la quasi-topologie et la topologie associée sont homotopiquement équivalentes. La définition de CW-complexe qu'on considère est celle de [16] .

10.1 Définition. On appelle *quasi-CW-complexe* un espace quasi-topologique X , muni d'une famille X^k (k entier ≥ 0) de sous-espaces tels que:

- 1) X^0 est un espace topologique discret.
- 2) Pour chaque $k \geq 0$, il existe des applications continues

$$f_\alpha: I^{k+1} \rightarrow X^k,$$

telles que X^{k+1} soit un collage quasi-topologique de X^k et des $I_\alpha^{k+1} = I^{k+1}$ au moyen des f_α .

- 3) $X = \bigcup X^k$ et la quasi-topologie de X est la quasi-topologie finale définie par les inclusions $i_k: X^k \rightarrow X$.

On dit que le quasi-CW-complexe est *fini* si, pour chaque $k \geq 0$, la famille des f_α peut être choisie finie et si $X = X^n$ pour $n \geq n_0$.

10.2 Proposition. Si X , muni des X^k , est un quasi-CW-complexe, alors X est séparé et chaque X^k est fermé dans X .

Démonstration: On voit par induction, compte tenu de I 11.1 et I 2.7, que, pour $k \leq l$, X^k est fermé dans X^l . La topologie associée à la quasi-topologie de X étant la topologie finale définie par les applications $i_k: X^k \rightarrow X$ et les topologies associées aux X^k (I 2.4), la caractérisation des fermés d'une topologie finale montre que chaque X^k est fermé dans X . On voit par induction, compte tenu de I 11.2, que chaque X^k est séparé. D'après I 4.9, pour montrer que X est séparé il nous suffit de voir que, pour $k \leq l$, $X^k \times X^k$ est fermé dans $X^k \times X^l$ et dans $X^l \times X^k$, ce qui résulte du fait que X^k est fermé dans X^l .

10.3 Proposition. Si X , muni des X^k , est un quasi-CW-complexe, et si X' et X^k sont les topologies associées, alors X' , muni des X^k , est un CW-complexe.

Démonstration: Le fait que X^k soit un sous-espace topologique de X' résulte de I 2.7 et de la proposition antérieure. Il suffit maintenant de tenir compte de I 2.4.

10.4 Remarque. Supposons qu'on se soit donné un espace quasi-topologique discret X^0 et qu'on construise successivement des espaces X^k de telle façon que $X^k \subset X^{k+1}$ et que X^{k+1} soit un collage quasi-topologique de X^k et d'une famille d'espaces $I_\alpha^{k+1} = I^{k+1}$ au moyen d'applications $f_\alpha: I_\alpha^{k+1} \rightarrow X^k$. Soit $\underline{X} = \bigcup \underline{X}^k$, qu'on munit de la quasi-topologie finale. Alors X , muni des X^k , est un quasi-CW-complexe. En effet I 11.1 garantit que X^k est un sous-espace de X^{k+1} , donc, pour $k \leq l$, X^k est un sous-espace de X^l ; alors la proposition I 8.2 garantit que X induit sur chaque X^k sa quasi-topologie.

10.5 Proposition. Si X , muni des X^k , est un quasi-CW-complexe fini, et si X' est la topologie associée, alors la classe d'équivalence de

$$\text{id} : X \rightarrow X'$$

est inversible dans $\frac{OT}{\sim}$.

Démonstration: On va construire, pour chaque $k \geq 0$, une application continue

$$H_k : X^k \times I \rightarrow X^k$$

telle que

$$H_k : X^k \times I \rightarrow X^k,$$

soit continue, que l'application

$$g_k : X^k \rightarrow X^k, \quad x \mapsto H_k(x, 1),$$

soit continue de X^k dans X^k et qu'on ait $H_k(x, 0) = x$. Il s'ensuivra, en choisissant k tel que $X^k = X$, que g_k sera un inverse de $\text{id} : X \rightarrow X'$ dans $\frac{OT}{\sim}$, les homotopies

$$\text{id} \circ g_k \sim 1_{X'}, \quad g_k \circ \text{id} \sim 1_X$$

étant fournies par H_k . La construction des H_k sera faite par induction:

On pose

$$H_0: X^0 \times I \rightarrow X^0, \quad H_0(x, t) = x.$$

Supposons $H_k: X^k \times I \rightarrow X^k$ construit. Soit X^{k+1} le collage de X^k et des $I_i^{k+1} = I^{k+1}$ au moyen des $f_i: I^{k+1} \rightarrow X^k$, $i = 1, 2, \dots, n$. La quasi-topologie de X^{k+1} étant la quasi-topologie finale définie par l'inclusion $i: X^k \rightarrow X^{k+1}$ et les applications

$$f_i: I^{k+1} \rightarrow X^{k+1},$$

$X^{k+1} \times I$ est la quasi-topologie finale définie par les applications $i \times 1_I$ et $f_i \times 1_I$, et de même (puisque I est localement compact et séparé) avec X^{k+1} et X^k à la place de X^{k+1} et X^k .

Soit P_{k+1} le point $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}) \in I^{k+1}$, soit l'application continue

$$M: R^{k+1} \rightarrow R, \quad (x_1, \dots, x_{k+1}) \mapsto \max |x_i|.$$

Définissons

$$H_{k+1}: X^{k+1} \times I \rightarrow X^{k+1}$$

en posant, si $x \in X^k$,

$$H_{k+1}(x, t) = H_k(x, t)$$

et, si $x \in I^{k+1}$,

$$H_{k+1}(\bar{f}_i(x), t) =$$

$$= \begin{cases} \bar{f}_i(P_{k+1} + \frac{2}{2-t}(x - P_{k+1})) & , \quad 0 \leq M(x - P_{k+1}) \leq \frac{2-t}{4} \\ H_k(\bar{f}_i(P_{k+1} + \frac{1}{2M(x - P_{k+1})}(x - P_{k+1})), 8(M(x - P_{k+1}) - \frac{2-t}{4})) & , \quad \frac{2-t}{4} \leq M(x - P_{k+1}) \leq \frac{4-t}{8} \\ H_k(\bar{f}_i(P_{k+1} + \frac{1}{2M(x - P_{k+1})}(x - P_{k+1})), t) & , \quad \frac{4-t}{8} \leq M(x - P_{k+1}) \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

H_{k+1} est continue et aussi continue de $X^{k+1} \times I$ dans X^{k+1} , et l'on a $H_{k+1}(y, 0) = y$. Notant

$$G_{k+1}: X^{k+1} \rightarrow X^{k+1}, \quad y \mapsto H_{k+1}(y, 1),$$

le seul point à démontrer est que G_{k+1} est continue de X^{k+1} dans X^{k+1} . Or, si

$$A = \{x \in I^{k+1} / M(x - P_{k+1}) \leq \frac{3}{8}\}, \quad B = \{x \in I^{k+1} / M(x - P_{k+1}) \geq \frac{3}{8}\},$$

X^{k+1} est réunion des ensembles fermés X^k , $\bar{f}_i(A)$, $\bar{f}_i(B)$ (ces derniers sont fermés, car ils sont compacts et X^{k+1} séparé). Les restrictions de G_{k+1} à X^k et $\bar{f}_i(A)$ sont continues (la restriction $\bar{f}_i/: A \rightarrow \bar{f}_i(A)$ est un homéomorphisme d'après I 11.1); donc, compte

tenu de I 7.7 et I 7.8, il nous suffit de voir que la restriction de g_{k+1} à $\bar{f}_i(B)$ (topologie induite par X^{k+1}) à valeurs dans X^{k+1} est continue. Or il en est ainsi, car c'est le composé de l'application continue

$$g_k: X^k \rightarrow X^k$$

avec l'application continue

$$\bar{f}_i(B) \rightarrow X^k, \quad \bar{f}_i(x) \sim f_i(p_{k+1} + \frac{1}{2^i(x-p_{k+1})}(x-p_{k+1}))$$

($\bar{f}_i: B \rightarrow \bar{f}_i(B)$ définit dans le second membre la topologie finale, car B est compact et $\bar{f}_i(B)$ séparé).

Nous remarquons, en utilisant I 3.3, que, si X et Y , munis des X^k et des Y^k , sont des quasi-CW-complexes, alors $X \times Y$ muni des

$$(X \times Y)^k = \bigcup_{i+j=k} X^i \times Y^j$$

est un quasi-CW-complexe, proposition qui n'est pas valable, sans restrictions, dans le cas des CW-complexes.

On va maintenant voir un cas où une quasi-topologie et la topologie associée ne sont pas isomorphes dans $\frac{\mathcal{OT}}{\sim}$.

10.6 Exemple. Pour chaque $x \in \mathbb{R}^2$, $x \neq 0$, soit F_x le filtre $\mathcal{V}_x$, où $\mathcal{V}$ est le filtre des voisinages de 0 dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{V}_x$ celui des voisinages de x dans $\mathbb{R}^2$. Par $\mathcal{V}_x$ nous entendons le filtre image du filtre $\mathcal{V} \times \mathcal{V}_x$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ par l'application

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x.$$

Définissons une quasi-topologie π sur $\mathbb{R}^2$ en notant $\pi(0)$ la classe des filtres F sur $\mathbb{R}^2$ tels qu'il existe

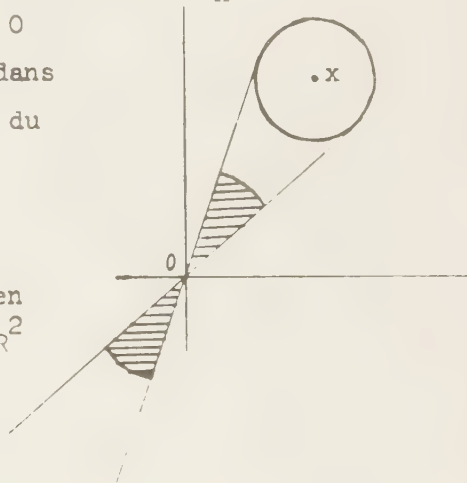
$$x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$$

avec

$$F \supset F_{x_1} \cap \dots \cap F_{x_n},$$

et en définissant les $\pi(x)$ de telle façon que les translations soient des homéomorphismes.

On va voir que la topologie T_π associée à π est la topologie



canonique de $\mathbb{R}^2$ (ce résultat a été indiqué dans {3} , exemple 1.1).

Si l'on tient compte du fait que chaque F_x converge vers 0 dans $\mathbb{R}^2$, on voit que

$$1_{\mathbb{R}^2} : \pi \rightarrow \mathbb{R}^2$$

est continue, donc continue de T_π dans $\mathbb{R}^2$. Il nous suffit donc de voir que, si U est un ouvert de T_π , alors U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Or, soit $x \in U$; montrons que U est un voisinage de x dans $\mathbb{R}^2$; en raisonnant par translation , on peut déjà supposer $x = 0$. Pour chaque

$$y \in K = \{z \in \mathbb{R}^2 / \|z\| = 1\} ,$$

on a $F_y \xrightarrow{\pi} 0$, donc $U \in F_y$, c'est-à-dire il existe un ouvert U_y , avec $y \in U_y$, et $\delta_y > 0$ tels que, pour $z \in U_y$ et $|\lambda| < \delta_y$, on ait $\lambda z \in U$. Les U_y constituent un recouvrement ouvert du compact K et l'on peut donc choisir $y_1, \dots, y_k \in K$ tels que $U_{y_1}, \dots, U_{y_k}$ recouvrent K ; alors, si

$$\delta = \min(\delta_{y_1}, \dots, \delta_{y_k}) ,$$

on a $z \in U$ si $\|z\| < \delta$.

Considérons maintenant l'application continue

$$f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2 , \quad f(t) = te^{\frac{it}{t}} , \quad f(0) = 0$$

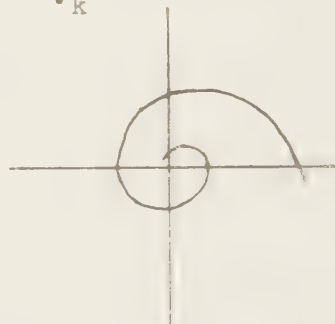
($\mathbb{R}^2$ identifié avec le corps des complexes $\mathbb{C}$) ; soit $A = f([0,1])$. A étant fermé dans $\mathbb{R}^2$ (car il est compact) , la topologie associée à la quasi-topologie π/A est la topologie induite par la topologie canonique de $\mathbb{R}^2$ (I 2.7) qui est connexe par arcs (car il en est ainsi de $[0,1]$).

On va montrer que π/A n'est pas connexe par arcs et ne peut donc pas être isomorphe à la topologie $T_{(\pi/A)}$ dans $\frac{\mathbb{T}}{\sim}$.

Supposons que π/A soit connexe par arcs, soit $\eta: [0,1] \rightarrow A$ une application continue telle que $\eta(0) = e^i$, $\eta(1) = 0$. Soit

$$\alpha = \min\{t \in [0,1] / \eta(t) = 0\}$$

(c'est un ensemble compact non vide) . f étant un homéomorphisme de $[0,1]$ sur A avec la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2$ (puisque f est une bijection continue, le premier espace est compact et le second



séparé) , on voit que, pour tout $\beta < \alpha$, $f^{-1}(n([\beta, \alpha]))$ est un connexe de $[0, 1]$ contenant $f^{-1}(n(\beta))$ et $f^{-1}(n(\alpha)) = 1$, donc aussi l'intervalle $[f^{-1}(n(\beta)), 1]$; $n([\beta, \alpha])$ contient donc des complexes de n'importe quel argument. Ceci entraîne que le filtre image par n du filtre des voisinages de α dans $[0, 1]$ ne peut pas converger vers 0 dans π (on voit aisément que, si $F \xrightarrow{\pi} 0$, il existe $B \in F$ et un argument θ tels que, dans B il n'existe pas de complexe d'argument θ) et ceci est absurde.

INDEX

	Pages		Pages
Application continue.	7	Famille sommable.	(1
Cofibration.	49	Famille surfinalisante.	121
Collage.	39	Fibration.	49
Compacte (quasi-topologie-).	16	Foncteur représentable.	119
Compatible (limite projec-		Fonction de relèvement.	58
tive ou inductive-).	47	- généralisée.	59
Composantes connexes	32	Fortement exacte (suite-).	100
Composantes connexes par		Groupe d'homotopie	
arcs.	35	- absolu.	23
Cône réduit	76	- relatif.	24
Connexe (quasi-topologie-).	29	Homotope.	46
Connexe par arcs (quasi-		HUREWICZ	
topologie-).	35	homomorphisme d' -.	135
Connexe (simplement -).	156	" Théorème d' -.	(5, 157
Connexes (points - dans		Localement connexe (qua-	
...).	32	si-topologie-).	32
Convergence locale (qua-		Localement connexe par arcs	
si-topologie de la-).	11	(quasi-topologie-).	36
Cube dégénéré.	112	n- morphisme.	(8
Cube singulier.	111	Opérateur "division hary-	
Demi-fermeture.	30	centrique" .	119
p_{QT} -dominée (catégorie-).	46	Opérateur prismatique.	115
EILENBERG-ZILBER (Théo-		Ouvert numérique.	60
rème d' -).	131	Produit tensoriel.	(9
Espace vectoriel quasi-to-		Quasi-C*-complexe.	160
pologique.	35	Quasi-localement convexe	
Equable (espace vectoriel		(espace vectoriel quasi-	
quasi-topologique-).	38	topologique-).	30
Equable (filtre-).	38	Quasi-couverte.	20
Excisive (paire - de sous-		Quasi-topologie.	7
ensembles).	122	Raccorder.	28
Famille finalisante.	24	- strictement.	28
Famille localement finie.	24	Recollement.	20

	Pages		Pages
Rétracte.	90	Suite exacte d'homologie.	114
Semi-topologique.	18	Suite exacte d'homotopie	
Séparé (espace quasi-topologique -).		- d'une fibration.	103
	13	- d'une paire pointée.	108
Sphère quasi-topologique.	77	- d'un triplet pointé.	110
Sphère topologique.	77	Suspension.	80

INDEX DES NOTATIONS

	Pages	
x^E	6	Filtre qui admet pour base le seul ensemble $\{x\}$.
T	7	Catégorie des espaces topologiques.
QT	7	Catégorie des espaces quasi-topologiques.
Ens	7	Catégorie des ensembles.
$BL(X_\alpha)$	39	Espace obtenu par collage topologique des espaces topologiques X_α à l'espace topologique B .
$BQ(X_\alpha)$	40	Idem avec "quasi-topologique" au lieu de "topologique."
$\frac{X}{A}$	45	Espace quotient d'un espace quasi-topologique par un sous-ensemble.
QT_*	68	Catégorie des espaces quasi-topologiques pointés.
$\otimes$	69	Produit tensoriel.
$C(X, x_0)$	76	Cône réduit de l'espace quasi-topologique pointé (X, x_0) .
S_n	77	Sphère modifiée de dimension n .
$\theta_n: I^n \rightarrow S_n$	77	Application canonique.
$\vee$	81	Somme d'objets de QT_* .

	Pages	
$K_1(S_n) \rightarrow S_n \backslash S_n$	81	Applications définissant la structure de cogroupe de S_n .
QT_*	82	Catégorie des paires quasi-topologiques pointées.
Ens_*	83	Catégorie des ensembles pointés.
G	84	Catégorie des groupes.
$\pi_n(\hat{X})$, $\pi_n(\hat{X}, \hat{A})$	83, 84	Groupes d'homotopie des objets $\hat{X}$ et $(\hat{X}, \hat{A})$ de QT_* et QT_2 .
$\mathbb{Z}_0(\hat{X})$	84	Ensemble des composantes connexes par arcs de X , pointé en la composante de x_0 .
$\alpha_n : (CS_{n-1}, S_{n-1}) \rightarrow$ $(S_n, \{*\})$	86	
$\iota_n : \pi_n(\hat{X}) \rightarrow \pi_n(\hat{X}, \{x_0\})$	86	Isomorphisme canonique.
$\frac{\mathbb{Z}^n}{\mathbb{Z}_2^n}$, $\frac{\mathbb{Z}^n}{\mathbb{Z}_2^n}$	86	
$\lambda : \frac{\mathbb{Z}^{n+1}}{\mathbb{Z}^{n+1}_2} \rightarrow \mathbb{Z}^n$	87	Homéomorphisme canonique.
$\lambda : \mathbb{Z}^{n+1}_2 \rightarrow \mathbb{Z}^{n+1}_2$	87	Homéomorphisme canonique.
QT_*	87	Catégorie des triplets quasi-topologiques pointés.
$\Omega(A, B, C)$	88	Espace des chemins de X d'origine dans A et but dans B .
$\pi_1(\Omega(B, C, D)) \rightarrow \pi_1(\Omega(B, C))$	88	Fibration canonique $w \mapsto w(0)$.
$\pi_1(\Omega(B, C, D)) \rightarrow \pi_1(\Omega(B, C))$	88	Fibration canonique $w \mapsto w(1)$.
$\pi_n(\Omega(\hat{X}, \hat{X}_0, \hat{A})) \rightarrow$ $\pi_{n+1}(\hat{X}, \hat{A})$	89	Isomorphisme canonique.
$\lambda_n : \pi_n(\hat{X}) \rightarrow \pi_{n-1}(\hat{X})$	100	Morphisme de la suite exacte d'homotopie d'une fibration.

Pages

$s:A \rightarrow E(X,A,X)$	101	Application $av \rightarrow \hat{a}$.
$\hat{a}$	102	Application de valeur constante a .
$\Delta_n : \pi_n(\hat{X}, \hat{A}) \rightarrow \pi_{n-1}(\hat{A})$	105	Morphisme de la suite exacte d'homotopie d'une paire.
$\hat{\Delta}_n : \pi_n(\hat{X}, \hat{A}) \rightarrow \pi_{n-1}(\hat{A}, \hat{B})$	109	Morphisme de la suite exacte d'homotopie du triplet (X, A, B) .
$Q_n(X)$, $D_n(X)$	112	Modules des n -chaînes cubiques et des n -chaînes dégénérées.
$C(X)$, $C(X, A)$	113	
G_Z	114	Catégorie des modules gradués différentiels.
QT_2	114	Catégorie des paires quasi-topologiques.
$PC(E) \rightarrow C(I \times E)$	114	Opérateur prismatique.
$D:C(X) \rightarrow C(X)$	119	Opérateur division barycentrique.
$W:C(X) \rightarrow C(X)$	120	Homotopie naturelle entre D et 1 .
$G_n : I^n \rightarrow CS_{n-1}$	133	Générateur canonique de $H_n(CS_{n-1}, S_{n-1})$.
$h_n : \pi_n(\hat{X}, \hat{A}) \rightarrow H_n(X, A)$	135	Homomorphisme de Hurewicz.
$\sigma_n : H_n(E(X, A, A), \bar{E}(A, A, A)) \rightarrow H_{n+1}(X, A)$	137	

APPENDICE

On va esquisser comment on pourrait appliquer des méthodes simpliciales dans l'étude des propriétés de "Topologie Algébrique" de la catégorie $\mathcal{QT}$ des espaces quasi-topologiques. Ces méthodes simpliciales consistent à étudier les ensembles simpliciaux, objets mathématiques qui n'ont rien de topologique, pour lesquels on peut définir des groupes d'homotopie et d'homologie, concepts qui ont des propriétés analogues à celles qu'on trouvait dans la théorie topologique (ou quasi-topologique). On n'a ensuite qu'à associer, à chaque espace quasi-topologique, un ensemble simplicial et à comparer les concepts qui apparaissent dans les deux théories.

Sur les méthodes simpliciales, on utilisera comme ouvrages de base les livres de GABRIEL-ZISMAN ({29}) et MAY ({30}).

1. Le foncteur "Réalisation Géométrique"

Rappelons qu'on considère une catégorie Δ dont les objets sont les ensembles $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$ ($n \geq 0$), munis de l'ordre usuel, et les morphismes de $[m]$ vers $[n]$ les applications croissantes (au sens large). On peut considérer la catégorie $N(\text{Ens}, \Delta^*)^{\text{III}}$ des transformations naturelles entre foncteurs de la catégorie duale Δ^* de Δ vers la catégorie des ensembles Ens . Les objets de cette catégorie sont appelés ensembles simpliciaux.

On a un foncteur canonique F de Δ dans la catégorie $\mathcal{T}$ des espaces topologiques qui associe, à chaque $[n]$, le simplexe affine

$$\Delta_n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} / 0 \leq t_i, \sum t_i = 1\}$$

et, à l'application croissante $f: [n] \rightarrow [n]$, l'application continue:

$$\Delta_n \rightarrow \Delta_n, (t_0, \dots, t_n) \mapsto (t'_0, \dots, t'_n)$$

$$\text{où } t'_j = \sum_{i \in f^{-1}(j)} t_i.$$

Par composition avec l'inclusion $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{QT}$, on obtient un foncteur

$$F': \Delta \rightarrow \mathcal{QT}.$$

F' induit un foncteur:

$$N(Ens, QT^*)^{\mathbb{M}} \rightarrow N(Ens, \Delta^*)^{\mathbb{M}}$$

et, par composition avec le foncteur de Yoneda:

$$QT \rightarrow N(Ens, QT^*)^{\mathbb{M}}$$

on obtient un foncteur

$$S': QT \rightarrow N(Ens, \Delta^*)^{\mathbb{M}}$$

(le foncteur correspondant dans la théorie topologique,

$$S: T \rightarrow N(Ens, \Delta^*)^{\mathbb{M}},$$

est une restriction de S').

S' associe donc, à chaque espace quasi-topologique, un ensemble simplicial, lequel est d'ailleurs un complexe de Kan.

Par une construction catégorique, à partir du foncteur $F': \Delta \rightarrow QT$ on construit un foncteur

$$T': N(Ens, \Delta^*)^{\mathbb{M}} \rightarrow QT$$

(réalisation géométrique) qui est un adjoint à gauche de S' ; il est défini, à un isomorphisme près, par la condition de commuter avec les limites inductives et de rendre commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{F'} & QT \\ \downarrow & & \nearrow T' \\ N(Ens, \Delta^*)^{\mathbb{M}} & & \end{array}$$

où la flèche verticale est le foncteur de Yoneda.

T' est, de plus, compatible avec les limites projectives finies; il transforme un sous-ensemble simplicial en un sous-espace fermé et l'image d'un morphisme en l'image de l'application continue correspondante.

La réalisation géométrique d'un ensemble simplicial est un quasi-CW-complexe.

Si $T: N(Ens, \Delta^*)^{\mathbb{M}} \rightarrow T$ est le foncteur correspondant dans la théorie topologique, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{T'} & QT \\ N(Ens, \Delta^*)^{\mathbb{M}} & & \downarrow \\ & \xrightarrow{T} & T \end{array}$$

où la flèche verticale est le foncteur "topologie associée".

2. Les groupes d'homologie et d'homotopie

Les groupes d'homologie (simpliciale) d'un espace quasi-topologique X sont les groupes d'homologie de l'ensemble simplicial $S(X)$. La démonstration du fait que ces groupes d'homologie sont naturellement isomorphes aux groupes d'homologie cubique est calquée sur celle faite, pour le cas topologique, dans [22] et de même pour les groupes d'homologie relative.

Etudions maintenant les groupes d'homotopie.

Le foncteur de Yoneda:

$$\Delta \rightarrow N(Ens, \Delta^*)$$

associe, à chaque unité $[m]$ de Δ , un ensemble simplicial $\Delta[m]$ ($\Delta[m]([n]) = \text{Hom}_{\Delta}([m], [n])$). Considérant ($m \geq 1$) l'injection croissante qui ne prend pas la valeur i ,

$$\delta_i: [m-1] \rightarrow [m],$$

on a un morphisme d'ensembles simpliciaux associé

$$\bar{\delta}_i: \Delta[m-1] \rightarrow \Delta[m];$$

son image est un sous-objet simplicial de $\Delta[m]$, noté $\Delta^i[m]$. On note $\dot{\Delta}[m]$ le sous-ensemble simplicial de $\Delta[m]$ réunion de tous les $\Delta^i[m]$, et $\Delta'[m]$ celui qui est réunion des $\Delta^i[m]$, $i \neq 0$.

Si X est un ensemble simplicial et $*$ un sommet de X (c'est-à-dire $* \in X_0 = X([0])$), on représente encore par $*$ le sous-ensemble simplicial de X image du morphisme $\tilde{*}: \Delta[0] \rightarrow X$ (il existe une bijection $x \mapsto \tilde{x}$, entre l'ensemble des morphismes $\Delta[n] \rightarrow X$ et les éléments de $X_n = X([n])$); chaque $*_n$ a un seul élément, noté encore $*$.

Si $(X, A, *)$ est une paire de Kan pointée (c'est-à-dire X est un complexe de Kan, A un sous-ensemble simplicial qui est un complexe de Kan et $* \in A_0$), on peut, pour chaque $n \geq 1$, considérer l'ensemble des morphismes

$$f: (\Delta[n], \Delta^0[n], \Delta'[n]) \rightarrow (X, A, *)$$

Sur cet ensemble on définit une relation d'équivalence (homotopie) en disant que $f \sim g$ s'il existe un morphisme

$$H: (\Delta[n] \times I, \Delta^0[n] \times I, \Delta'[n] \times I) \rightarrow (X, A, *)$$

(où $I = \Delta[1]$) tel que $H(x, (0)) = f(x)$, $H(x, (1)) = g(x)$ (on note (0) et (1) les deux éléments de $I_0 = \text{Hom}_\Delta([1], [0])$); l'ensemble quotient par cette relation d'équivalence est noté $\pi_n(X, A, *)$.

D'une façon analogue on définit, si $(X, *)$ est un complexe de Kan pointé, pour $n \geq 0$, $\pi_n(X, *)$ comme étant le quotient de l'ensemble des morphismes

$$f: (\Delta[n], \dot{\Delta}[n]) \rightarrow (X, *)$$

(on note $\dot{\Delta}[0] = \emptyset$, ensemble simplicial identiquement vide) par la relation d'homotopie.

La réalisation géométrique de $\Delta[n]$ est le simplexe affine Δ_n , celle de $\dot{\Delta}[n]$ est le sous-espace

$$\Delta_n^i = \{(t_0, \dots, t_n) \in \Delta_n / t_i = 0\}$$

de Δ_n , celles de $\Delta'[n]$ et $\dot{\Delta}[n]$ étant respectivement les sous-espaces de Δ_n :

$$\Delta'_n = \bigcup_{i \neq 0} \Delta_n^i , \quad \dot{\Delta}_n = \bigcup_1 \Delta_n^i .$$

Si $(X, A, *)$ est une paire quasi-topologique pointée, on a une paire de Kan pointée $(S'X, S'A, S'*)$ et il existe une bijection entre l'ensemble des morphismes:

$$(\Delta[n], \Delta^0[n], \Delta'[n]) \rightarrow (S'X, S'A, S'*)$$

et l'ensemble des morphismes:

$$(\Delta_n, \Delta_n^0, \Delta'_n) \rightarrow (X, A, *) ;$$

cette bijection est compatible avec les homotopies et induit donc une bijection entre $\pi_n(S'X, S'A, S'*)$ et l'ensemble des classes d'homotopie de morphismes:

$$(\Delta_n, \Delta_n^0, \Delta'_n) \rightarrow (X, A, *) .$$

Le triplet $(\Delta_n, \Delta_n^0, \Delta'_n)$ est isomorphe à

$$(I^n, \{1\} \times I^{n-1}, \{\emptyset\} \times I^{n-1} \cup I \times I^{n-1}) .$$

Donner un morphisme

$$f: (I^n, \{1\} \times I^{n-1}, \{\emptyset\} \times I^{n-1} \cup I \times I^{n-1}) \rightarrow (X, A, *)$$

équivalait à donner un morphisme

$$\hat{f}: (I^{n-1}, \dot{I}^{n-1}) \rightarrow (E(X, *, A), \hat{*}) , \quad \hat{f}(t_1, \dots, t_{n-1})(t) = f(t, t_1, \dots, t_{n-1}) ,$$

et ceci équivaut à donner un morphisme

$$f: (S'_{n-1}, \omega) \rightarrow (E(X, *, A), \hat{*}) .$$

$\pi_n(S'X, S'A, S'*)$ est donc en bijection avec l'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues pointées:

$$(S'_{n-1}, \omega) \rightarrow (E(X, *, A), \hat{*}) ,$$

c'est-à-dire avec $\pi_{n-1}(E(X, *, A), \hat{*})$ qui est isomorphe à $\pi_n(X, A, *)$.

De même on voit que, si $(X, *)$ est un espace quasi-topologique pointé, il existe une bijection entre $\pi_n(S'X, S'*)$ et $\pi_n(X, *)$.

Ayant établi le rapport entre les groupes d'homotopie et d'homologie des espaces quasi-topologiques et des ensembles simpliciaux, beaucoup de résultats du deuxième chapitre peuvent être retrouvés à partir des résultats analogues de la théorie simpliciale. On cite par exemple le théorème d'Eilenberg-Zilber, la suite exacte d'homotopie d'une paire et le théorème de Hurewicz sur le rapport des groupes d'homotopie et d'homologie.

BIBLIOGRAPHIE

- {1} KOWALSKY H. J. , Limesräume und Kompletttierung , *Math. Nach.* 12 (1954) , pp. 301+340 .
- {2} FISCHER H. R. , Limesräume , *Math. Ann.* 137 (1959) , pp. 269+303 .
- {3} BASTIANI A. , Applications différentiables et variétés différentiables de dimension infinie , *Journ. Analyse Math.* 13 (1964) , pp. 1+114 .
- {4} COOK C. H. et FISCHER H. R. , On equicontinuity and continuous convergence , *Math. Ann.* 159 (1965) , pp. 94+104 .
- {5} COOK C. H. et FISCHER H. R. , Uniform convergent structures , *Math. Ann.* 173 (1967) , pp. 290+306 .
- {6} BINZ E. et KELLER H. H. , Funktionenräume in der Kategorie der Limesräume , *Ann. Acad. Sci. Fenn. A.* 1 383 (1966) .
- {7} BINZ E. , Bemerkungen zu limitierten Funktionenalgebren , *Math. Ann.* 175 (1968) , pp. 169+184 .
- {8} EHRESMANN C. , Catégories Topologiques I, II, III, *Proc. Nederl. Akad. v. Wetensch. Series A-69* , 1 (1966) .
- {9} BINZ E. , Ein Differenzierbarkeitsbegriff in limitierten Vektorräume , *Comm. Math. Helv.* 41 (1966-67) .
- {10} FROLICHER A. et BUCHER W. , Calculus in Vector Spaces without norm , *Lecture Notes* , 30 , Springer (1966) .
- {11} ARENS R. F. , A topology for spaces of transformations , *Annals of Math.* 47 (1946) , pp. 480+495 .
- {12} ANTOINE P. , Etude élémentaire des catégories d'ensembles structurés , *Bull. Soc. Math. Belge* 2 et 4 (1966) .
- {13} BOURBAKI N. , *Topologie Générale* , Chapitre I , A. S. I. 1142 , Hermann , Paris , 1965 .
- {14} BROWN R. , *Elements of Modern Topology* , Mc. Graw-Hill , London , 1968 .
- {15} EHRESMANN C. , *Catégories et Structures* , Dunod , Paris , 1965 .
- {16} SPANIER E. H. , *Algebraic Topology* , Mc. Graw-Hill , 1966 .
- {17} EILENBERG S. , *Homotopie et Espaces Fibrés* , Secr. Math. de l'Ecole Normale Supérieure , Paris , 1968 .
- {18} KAN D. M. , Adjoint Functors , *Trans. Amer. Math. Soc.* 87 (1958) , pp. 294+329 .

- {19} ECKMANN B. et HILTON P. J. , Group-like structures in general categories , I, II, III , *Math. Ann.* 145 (1962) , 151 (1963) , 150 (1963) .
- {20} ZISMAN M. , Espaces fibrés et groupes d'homotopie , *Séminaire Cartan* 11 (1958-59) .
- {21} SERRE J. P. , Homologie singulière des espaces fibrés , *Ann. Math.* 54-3 (1951) .
- {22} EILENBERG S. et MAC LANE S. , Acyclic Models , *Amer. Journ. of Math.* 75 (1953) , pp. 189-199 .
- {23} HOLM P. , Excision and cofibrations , *Math. Scand.* 19 (1966) .
- {24} STEENROD N. E. , A convenient category of topological spaces , *Michigan Math. Journ.* 14-2 (1967) .
- {25} SPANIER E. , Quasi-topologies , *Duke Math. Journ.* 30 (1963) .
- {26} EILENBERG et KELLY , Closed categories , *Proc. Conf. on Categorical Algebra* , La Jolla , 1965 , Springer .
- {27} CHARTRELLE M. , Sur la catégorie des applications quasi-continues , *Cahiers Top. Géom. Diff.* 11-2 (1969) .
- {28} FOLTZ F. , Produit tensoriel généralisé , *Cahiers Top. Géom. Diff.* 10-3 (1968) .
- {29} GABRIEL P. et ZISMAN M. , *Calculus of fractions and Homotopy Theory* , Springer , 1967 .
- {30} MAY J. P. , *Simplicial objects in Algebraic Topology* , Van Nostrand, 1967 .

